
IN PROMPTU

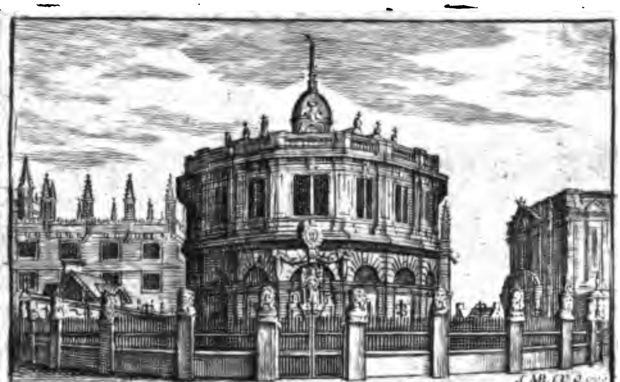
Cost 5.lb Sterling Tho: Trotter

1527

SECTIONUM CONICARUM
ELEMENTA
NOVA METHODO DEMONSTRATA.

Authore JACOBO MILNES, A. M. Rectore de INGESTRE in Agro STAFFORDIENSI.

EDITIO SECUNDA
Emendata, Plurimisque in locis aucta & illustrata.



OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO. MDCCXII.
Impensis ANTH. PEISLEY Bibliop.

Imprimatur,

AR. CHARLETT.

Aug. 2. 1712.

CELEBERRIMÆ

ACADEMIÆ

OXONIENSI

IN USUM

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

OPUSCULUM HOC

Humillime D.

JACOBUS MILNES.

PRÆFATIO.

IN hisce Elementis concinnandis id potissimùm egi, ut præcipuas Sectionum Conicarum proprietates, quàm possem breviter & dilucidè, demonstratas darem.

Cui proposito me, aliquâ ex parte, satisfecisse spero. Novâ quippe argumentum hoc tractandi methodo excogitatâ, partimque propositiones haud paucas (quarum præcipuùs usus hactenus in eo stetit quòd aliarum demonstrationibus inservierint) resecando, partim quæ seorsim demonstrari solent generalibus theorematîs includendo, aut alias ex aliis, corollariorum vice, levi operâ deducendo, ex utilioribus plerasque haud magno propositionum numero complexus sum. Ordine verò naturali easdem disponendo, effeci, ut minori molimine, & simpliciori apparatu demonstrentur, & à præcedentibus subsequentes quasi sponte emanent, non vi aut coactè eruantur.

Porrò proprietatum specie diversarum affinitates, mutuasque ad invicem relationes, & quemadmodum, pro certis quibusdam punctorum rectarumve positionibus, in se mutuo transeant, passim (additis scholiis) annotavi: Ut cùm de earum veritate non uno modo constiterit, & penitiùs perspectæ sint, & memoriæ altiùs imprimantur.

Nequid

Nequid autem absque causâ idoneâ innovasse viderer, quoties instituti ratio aliud non exegit, P. de la Hire *demonstrationes integras adhibui; Ex hujus enim Viri Cl. opere maximo materies nostra magnâ ex parte desumpta est. Non pauca tamen proprio marte inventa, quæque alibi (quod sciam) haud extant, hîc illîc interspersa sunt, quæ eruditus lector facile dignoscet, ut iis recensendis immorandum non sit.*

Hæc breviter de opere hoc in genere dicta sunto. In hâc verò secundâ editione prioris menda typographica (nimis crebra) tollenda curavi, quæ obscuriora erant, aut lectorem quovismodo morari possent, elucidavi; demptis quibusdam generaliora substitui; plurimaque, quæ ad operis complementum desiderari visa sunt, locis congruis inserui. Ex ultimo hoc genere speciatim sunt quæ continentur in propositionibus 35. & 36. partis I. & earum corollariis, quibus (uti & prop. 4. par. 5. quæ hinc pendet) materiam suppeditavit incomparabilis viri D. If. Newton Principiorum *Liber I. quæ etiam in prop. ultimâ part. 2. cujus demonstrationem elegantiorem quam alibi facile reperies, mecum pridem communicavit Vir Cl.* Jo. Keill. A. M. *nunc* Savilianus *Astronomiæ Professor dignissimus; quæ denique in propositionum 5. 6. & 9. part. 4. corollariis, & ejusdem partis prop. 7. & 11. cum earum corollariis, & totâ ferè parte quintâ, quam quasi ab integro recudi; ut alia multa taceam quæ singula enumerando prolixus essem.*

Quòd secunda hæc editio tam correcta prodierit, curæ debetur docti ac ingenui Juvenis, & matheseos admodum studiosi, Martini Benson Ædis Christi Alumni, *qui libenter typothetarum sphalmata corrigendi*

rigendi munus in se suscepit, cuique, eo nomine, & à me, & à lectoribus, gratia meritò habenda est.

Ut lectores candidè mentem meam interpretari, & siquid levius admissum, utpote siquid (salvâ veritate) minus commodè enunciatum, aut inconcinnius demonstratum fuerit, id mihi ignoscere velint, obnixe oro; quorum commodis siquo pacto inservierim, studii & laboris mei mercedem satis amplam me reportasse existimabo.

CORRI-

CORRIGENDA.

Pag. 2. lin. 18. pro *diverso* lege *diversum*. p. 32. in marg. pro 23. 93. p. 33. l. 7. dele *Idem in Hyperbolâ intellige*.

ADDENDA.

Pag. 31. lin. 17. lege *ordinata, vel contingens ordinatis parallela, habeatque &c.* ib. l. 19. *recta per centrum intra &c.* p. 23. l. 30. *parallelæ sunt*, [*vel si* BI, CI *parallelæ sint erit* (*per coroll.* 3. & 6. *prop.* 15.) BT=VC, *adeoque* BC *parallela* TV] *unde &c.*

Tabulæ sic locandæ.

Tab.	Pag.	T.	P.	T.	P.	T.	P.
1	8	6	26	11	58	16	86
2	10	7	38	12	64	17	88
3	16	8	42	13	66	18	96
4	18	9	48	14	72	19	106
5	22	10	54	15	82	20	116

PARS

PARS I.

SECTIO I.

Definitiones.

I. SI recta linea AE per punctum quodvis A extra circuli BDEC planum positum utrinque infinite extensa, manente puncto A, per totam circuli peripheriam circumagatur; Binæ hujusmodi motu genitæ superficies sigillatim *Conicæ superficies* appellantur. *Fig.* 1, 2.

II. Conjunctim vero *Superficies ad verticem oppositæ*; vel simpliciter *Superficies oppositæ*.

III. Punctum A *Vertex* dicitur.

IV. Circulus BDEC *Basis*.

V. Recta AC per verticem A & basis centrum C utrinque infinite producta *Axis*.

VI. Solidum superficie conicâ & basi contentum *Conus* dicitur.

VII. Et quidem, si axis ad basim rectus fuerit, *Conus Rectus*. 1.

VIII. Si inclinatus, *Conus Scalenus*. 2.

IX. Communis plani alicujus cum superficie conicâ intersectio, *Sectio Conica* dicitur.

Corollarium def. 1. Recta per punctum quodvis in utrâvis superficie & verticem ducta, tota est in eâdem superficie; Productaque ultra verticem est in superficie opposita.

Propositio I. Theorema I.

Recta linea AE per verticem A ducta ad quodvis punctum E intra utramvis superficierum oppositarum, 3.

 quantumvis

quantumvis utrinque producta, intra superficies conicas continetur. Rectaque per verticem A ducta ad quodlibet punctum G extra utramque superficiem, quantumvis producta, extra utramque superficiem manet.

Hæc propositio clarior est quam ut demonstratione egeat.

Prop. II. Theor. II.

4. *Si per Coni verticem A transeat planum ABC, secans utcunque Conicas superficies; Easdem in duabus rectis AB, AC secabit.*

Sit intersectio plani secantis & plani basis recta BC, & à punctis B, C, in quibus hæc occurrit basis peripheriæ, ad verticem A ductæ intelligantur rectæ BA, CA; Erunt hæ tum in plano secante, tum (per *Coroll.* præced.) in superficiebus Conicis, hoc est, sunt plani & superficierum intersectiones. Porro ab A ad punctum quodvis F in basis peripheria, à B & C diverso, ducatur recta AF; Erit hæc ubique extra planum ABC; hoc est, planum ABC superficiebus Conicis solummodo in rectis AB, BC occurrit.

Prop. III. Theor. III.

5. *Recta linea ED conjungens bina quæcunque puncta E, D, in eadem conica superficie sumpta, modò non sint in eadem recta per verticem, tota cadit intra superficiem conicam, producta vero utrinque extra eandem; & neutri superficierum oppositarum amplius occurrit.*
6. *Contra, Recta ED conjungens bina quæcunque puncta E, D, in oppositis superficiebus, modò non in eadem recta per verticem, cadit extra utramque superficiem, productaque utrinque intra utramque transit, neutrique earum amplius occurrit.*

Nam ductis rectis AE, AD, & productis (si opus) in C, B, Planum per AEC, ADB, in quo DE sita est;

est, non occurrit superficiei vel superficiebus opposi-
tis nisi in rectis A E C, A D B; unde recta D E non
occurrit ipsis nisi in punctis D, E. In priore vero casu 5
planum anguli D A E, proindeque recta D E, est intra
superficiem conicam; productaque utrinque extra ean-
dem cadet. In posteriore planum anguli D A E est ex- 6
tra utramque superficierum oppositarum, proindeque
& recta D E; producta vero utrinque intra utramque
transibit.

Si puncta D, E sint in eadem recta per verticem, erit recta ipsas conjungens (per *Coroll.* præced.) in ipsis superficiebus conicis.

Prop. IV. Theor. IV.

Si circulum qui basis est Coni contingat recta D E in D,
à Coni autem vertice A ad contactum D agatur recta 7.
A D; Planum A D E per utramque rectam produ-
ctum superficiei conicæ solummodo in recta A D oc-
currit. Hujusmodi vero occursus Contactus *dicitur.*

Recta A D tum superficiei conicæ, tum plano A D E communis est; Cùm vero, præter D, quodvis punctum F in baseos peripheria sit extra rectam D E, Erit etiam, præter D A, quævis alia recta F A in superficie Conica extra planum A D E; unde liquet propositum.

Coroll. 1. Hinc & ex def. 1. liquet planum A D E productum superficiem oppositam in D A producta contingere.

Coroll. 2. Hinc ėtiam patet methodus Ducendi planum quod superficiem Conicam in data recta A D contingat. Ductâ nempe in plano baseos rectâ D E peripheriam ejus in D contingente, Actóque per A D, D E plano A D E, proposito satisfiet.

Coroll. 3. Præter A D E, aliud planum secundum A D superficiem conicam non contingit. Nam intersectio ejus cum basi hujus peripheriam secabit; unde & planum ipsum superficiem conicam secabit, hoc est, non continget.

Prop. V. Problema I.

8. *Per rectam AC, per coni verticem A extra superficiem ejus utcunque ductam, Planum ducere quod superficiem conicam contingat.*

Per AC agatur utcunque planum, secans basim in GH, Cui recta AC (cum in eodem sit plano) occurret, vel erit parallela.

1°. Occurrat in E; A puncto E baseos peripheriam contingat ex utravis parte recta ED; Connexâ AD, Erit ADE planum quæsitum.

Transit enim per AC, & (per præced.) superficiem conicam contingit.

9. 2°. Sit AC parallela GH; Bisectâ GH in M, erectâque, ex utravis parte, ad GH perpendiculari MD, factâque DE parallelâ GH, & connexâ AD; Erit iterum ADE planum quæsitum.

Nam (ob AC || GH || DE) erit AC in plano ADE; Continget vero DE baseos peripheriam in D; unde (per præced.) planum ADE Conicam superficiem continget.

Coroll. Liquet bina tantum plana per AC superficiem conicam contingere; Ex utraque scilicet parte plani AGH unum.

Prop. VI. Theor. V.

10. *Recta quævis ED, rectæ cuivis AB per verticem A in ipsa superficie conica ductæ, parallela, (modò non sit in plano superficies in AB contingente) Uni tantùm superficierum oppositarum, idque in unico puncto E, occurrit; Hoc est, ex una parte, tota est extra utramque superficiem; Ex altera, tota intra illam continetur in qua punctum E situm est.*

Planum per parallelas AB, ED, secet superficies in cAC; Hoc planum BAC, in quo recta ED sita est, non occurrit superficiebus, nisi in AB, cAC; Rectaque

que E D (ob parallelismum) non occurrit rectæ A B; Occurrit tamen necessariò rectæ c A C alicubi in E, manetque ex una parte puncti E intra angulum B A C, ex altera intra angulum qui est huic deinceps; Unde &c.

Coroll. Liquet planum per D E, plano secundum A B superficiem conicam tangenti, parallelum, superficiei oppositæ non occurrere.

Prop. VII. Theor. VI.

Omnis recta E F, rectæ cuivis A D per verticem A ductæ, atque intra superficies conicas cadenti, parallela, utrique superficiei oppositæ occurrit alicubi in 11.
E, F. Omnisque recta E F, per punctum quodvis 12.
E in utravis superficie ducta, rectæ cuivis per verticem A D extra superficies cadenti, parallela, Eidem superficiei occurrit denuò in F; Excepto duntaxat casu ubi punctum E fuerit in una rectarum secundum quas plana per A D superficies contingunt.

Per A D & rectam E F transeat planum, secans conicas superficies in B A b, c A C, quod semper fieri posse, nisi in casu memorato, plus satis manifestum est; Cum A D cadat intra angulum B A C, vel B A c, Recta E F quæ est ipsi A D parallela, & in eodem cum ipsa plano, occurret necessariò utrique A B, A C alicubi in E, F; Eritque in priori quidem casu occursuum alter F in A B producta, hoc est, erunt E, F, in superficiebus oppositis.

Sin punctum E, in posteriori casu, sit in recta secundum quam planum per A D superficies conicas con- 13.
tingit, manifestum est planum per A D & punctum E conicas superficies non secare, & rectam E F || A D esse in plano superficies conicas secundum rectam A E C contingente.

Coroll 1. Hinc & per prop. 3. ulterius liquet Rectam 11.
E F, nisi in punctis E, F, neutri superficierum opposi- 12.
tarum amplius occurrere.

Coroll. 2. Omne planum per hujusmodi rectam E F, 11.
in

12. in priori caſu, ſecabit utramque ſuperficiem; Et in poſteriori, ſi per A D tranſeat planum quodvis, extra utramque ſuperficiem cadens, planum per E F huic parallelum, ſuperficiem conicam, in qua punctum E ſumptum eſt, ſecabit ex omni parte; ſuperficiei tamen oppoſitæ non occurret.

Prop. VIII. Theor. VII.

14. *Si alterutra ſuperficierum oppoſitarum plano ſecetur plano baſeos parallelo, Erit facta ſectio E G F L Circuli circumferentia.*

Secetur Conus utcunque per axem duobus planis, facientibus triangula A B D, A I K, quæ (ſi opus producta) occurrant plano Sectionis in G H L, E H F; Ob plana parallela, erunt triangula A H F, A C K, uti etiam A H L, A C D ſimilia: Quare

A H : A C :: H L : C D
& A H : A C :: H F : C K; unde
H L : H F :: C D : C K. Eſt vero C baſeos centrum, Unde C D = C K, ergo & H L = H F. Pari modo oſtendetur G H = H F; & ſimiliter in quavis alia interſectione plani E G F L cum plano per axem. Eſt ergo ſectio E G F L circuli circumferentia, cujus centrum H.

Prop. IX. Theor. VIII.

15. *Si Conus ſcalenus A B C L ſecetur plano per axem, & ad baſim recto, faciente triangulum A B L; Reſectoque utcunque ab angulo B A L triangulo A D I, triangulo A L B ſimili, ſed ſubcontrarie poſito, (i. e. ut ſit Ang. A L B = A D I) ſecetur iterum Conus plano per D I, ad trianguli A B L planum recto, Erit facta in ſuperficie conica ſectio D K I F circuli circumferentia. Dicitur autem D K I F* Sectio Subcontraria.

Per ipſius D I punctum quodvis G agatur recta E G H, ipſi B L parallela, Per quam tranſeat planum ad

ad planum trianguli rectum, proindeque basi parallelum, faciens (per præced.) in superficie conica circuli circumferentiam F E K H, planumque per D I secans in recta F G K; Erit (propter planum per axem) recta E H circuli F E K H diameter; Et (propter utriusque sectionis planum ad planum trianguli rectum) erit eorum intersectio K G F ad utramque D G, E G perpendicularis; Est itaque (propter circulum) $EG \times GH = GFq = GKq$; Sunt vero (propter Ang. $AID = AEH$, & $DGE = HGI$) triangula D G E, H G I similia; Unde $DG : GH :: EG : GI$; Ergo $DG \times GI = EG \times GH = $ (prius) $GFq = GKq$; Sunt ergo puncta F, K ad circuli peripheriam, cujus diameter D I. Idemque erit de quovis alio puncto in recta D I. Est igitur D K I F Circuli circumferentia.

Prop. X. Theor. IX.

Si in superficie conicâ, a plano quovis basi non-parallelo, fiat sectio D F I K, quæ sit circuli circumferentia, Erit eadem sectio subcontraria. 15.

Planum basi parallelum faciat circulum E K H F, secans planum circuli D F I K in K G F; sitque circuli E K H F diameter E G H ad K G F perpendicularis; Transibit hæc per axem, eritque $KG = GF$. Per rectam E G H, & coni axem transeat planum, secans planum circuli D F I K, in D G I, & basim in B L || E H; Erit (ob circulos) $EG \times GH = GKq = GFq = DG \times GI$; Ergo $EG : DG :: GI : GH$; Unde Triangula D G E, H G I similia. & ang. $DEG = HIG$. Si jam manente plano per axem A B L prius ducto, intelligantur quotcunque circuli E K H F à planis basi parallelis facti; Erunt horum planorum cum plano per axem intersectiones E G H, circulorum E K H F diametri; & (ob planorum parallelismum, & rectam E G H, ad F G K prius perpendicularem) ad respectivas eorum intersectiones. F G K cum plano circuli D F I K perpendiculares, easque ideo bisecabunt; Hoc est, recta

D I

DI (quæ eſt in eodem plano per axem) eas omnes biſecabit, & propterea eſt diameter, & ad eaſdem perpendicularis. Recta itaque FGK ad utramque DI, HE perpendicularis eſt; proindeque planum per axem tam ad planum circuli EFHK, (hoc eſt ad baſim,) quam ad planum circuli DFIK rectum eſt. Unde liquet propoſitum.

Coroll. Hinc niſi Sectio conica vel ſit ſectio ſubcontraria, vel fiat à plano baſi parallelo, non erit circuli circumferentia.

Lemma 1.

16. *Si duorum planorum ABE, BCF, cum plano aliquo tertio, interſectiones AD, CF ſint parallelæ; Erit etiam mutua ipſorum interſectio BE ipſis AD, CF parallela.*

Secentur utcunque hæc tria plana à duobus planis inter ſe parallelis, quorum interſectiones conſtituant triangula ACB, DEF; Erunt (ob plana parallela) trianguli ABC latera AC, AB, BC, trianguli DEF lateribus DF, DE, EF, reſpective parallela; Unde anguli parallelis lateribus contenti erunt æquales: Sed (ob parallelas rectas) AC = DF; adeoque ipſa triangula æqualia, & ſimilia. Ergo CB = FE, ac propterea BE || CF || AD.

Definitiones.

17. 1. Si Conus ABC plano ADE utcunque per verticem ſectus, rurſus plano ſecetur plano ADE parallelo; Erit facta in illius ſuperficie ſectio FGH HYPERBOLA; cujus planum productum, ſuperficiei oppoſitæ occurrens, faciet ejuſdem nominis ſectionem fgh; Hæ vero binæ conjunctim *Sectiones oppoſitæ* vocantur.

18. 2. Si per Coni verticem A, extraque illius ſuperficiem, (hoc eſt illam nec ſecans nec tangens) tranſeat utcunque planum DAE; Seceturque iterum conus plano

plano, plano D A E parallelo; Facta in illius superficie sectio F H G E L L I P S I S dicitur.

3. Quod si planum A D E coni superficiem contingat, seceturque conus plano, plano A D E parallelo; Facta in illius superficie sectio F H G dicitur P A R A B O L A. 19.

Coroll. 1. Hyperbola, & Parabola (cum conum in circuitu non secent) spatium non claudunt, & continuato Cono, simul in infinitum continuantur. Ellipsis vero Conum ambit, & in se revoluta spatium undique claudit.

Coroll. 2. Liquet Circuli circumferentiam Ellipsibus esse annumerandam. Nam si planum D A E per verticem sit plano basis, vel sectionis subcontrariæ parallelum, Planum huic parallelum faciet in superficie conica Circuli circumferentiam. Ideoque sub nomine vel sectionis conicæ in genere, vel Ellipseos in specie, etiam Circuli circumferentiam comprehensam intelligat lector. Quod semel monitum sufficiat.

Coroll. 3. Recta conjungens bina quæcunque puncta in sectione Conicâ, tota cadit intra sectionem, productaque utrinque extra eandem cadit, neque ei aut sectioni oppositæ amplius occurrit. Patet per prop. 3.

Coroll. 4. Conjungens bina puncta, in oppositis sectionibus sumpta, cadit extra sectiones; productaque utrinque intra utramque deinceps continetur, Neutrique earum amplius occurrit. Patet per prop. 3.

Coroll. 5. Unde Recta linea sectioni conicæ, vel sect. opp. in pluribus quam duobus punctis non occurrit.

Prop. XI. Theor. X.

Communis intersectio I L *plani alicujus* A M N, *superficiem conicam tangentis, cum plano sectionis conicæ* F I G, *in unico puncto* I *sectioni occurrit, totaque extra sectionem cadit. Hujusmodi autem occursus* Contactus *dicitur.* 20.

Nam planum A M N nisi in rectâ A I M superficiei

Conicæ non occurrit; Unde recta I L, quæ est in plano A M N, nisi in puncto I, ubi rectam A I M intersecat, sectioni non occurrit; Planum vero A I M cadit extra superficiem conicam, proindeque & recta I L extra sectionem.

20. *Coroll.* 1. Præter I L alia recta in puncto I sectionem non contingit. Nam erit hujusmodi recta necessario in alio plano per A M, ab A M N diverso; quod (per *Coroll* 3. prop. 4.) Conum non contingit, i. e. secat, proindeque hæc recta sectionem secabit.

21. 22. *Coroll.* 2. Duæ quælibet I L, M N Hyperbolam vel parabolam contingentes, necessario concurrunt. Nam (iisdem manentibus quæ in definitionibus) si dicantur parallelæ, erit planorum A I L, A M N contingentes formantium intersectio A B (per *Lemma* 1.) ipsis I L, M N parallela, ideoque in ipso plano A D E, quod sectionis plano est parallelum. Sed in hyperbola (per *Coroll.* prop. 5.) aliud adhuc planum per A B (nempe ex altera parte plani A D E) potest conum contingere; Et in Parabola ipsum A D E conum contingit; Tria igitur plana per unam eandemque rectam A B Conum contingunt, quod (per *Coroll.* prop. 5.) fieri nequit.

23. *Coroll.* 3. In Ellipsi vero, & oppositis sectionibus,
24. Contingenti cuivis I L, erit alia aliqua contingens *i l* parallela. Sit A B recta secundum quam planum A I L secat planum D A E; si per A B agatur aliud planum (per prop. 5.) tangens conicas superficies, formabit hoc contingentem *i l*; Estque (ob plana parallela) A B || I L, unde (per *Lem.* 1.) I L || *i l*.

Coroll. 4. Contingens Hyperbolam I L quantumvis producta sectioni oppositæ non occurrit. Nam planum A I L in quo recta I L sita est, non occurrit superficiebus nisi in A I; nec recta I L rectæ A I nisi in I.

Coroll. 5. Rectæ parallelæ duabus plures, Ellipsin vel Sectiones opp. non contingunt. Secus plana per eandem rectam per verticem, duobus plura, conum contingerent.

Prop.

Prop. XII. Theor. XI.

Iisdem positis quæ in definitionibus præcedentibus; In utrâvis sectionum oppositarum, recta quævis I K *facta à plano per utramvis* A D, *vel* A E, *& punctum quodvis* I *in sectione, ducto, planumque sectionis in* I K *secante, in unico hoc puncto* I *sectioni occurrit; & ex unâ parte tota intra sectionem continetur; ex alterâ vero manet tota extra utramque sectionum oppo- sitarum. Similiter, in Parabolâ, recta* I K *facta à* 26.
plano per A E *& punctum quodvis* I *in sectione ducto, sectioni in unico hoc puncto* I *occurrit; manetque ex unâ parte intra, ex altera extra sectionem.* 25.

2\. *At præter istiusmodi rectas* I K, *Quævis alia* I L *per* 25.
punctum quodvis I *sectionis, in plano sectionis, ducta,* 26.
Sectioni, vel sectionibus oppositis in binis punctis I, L *occurrit, vel saltem sectionem contingit.*

Ob plana parallela erit I K || A D vel A E; unde patet pars 1 per prop. *6*.

2\. Cum (ob plana parallela) rectæ omnes I K sint rectæ A E, vel A D, & sibi invicem parallelæ; recta I L non erit ipsi A D, vel A E parallela; Proindeque planum per I L & coni verticem non secabit planum A D E in A D vel A E, sed aliàs in A B, quæ in hyperbolâ quidem potest cadere vel intra Ang. D A B, id est intra superficies Conicas; quo in casu (per prop. 7.) recta I L huic parallela, occurret superficiei oppositæ, hoc est, occurret Sectioni oppositæ: Vel extra; quo in casu (per eandem prop.) occurret denuo eidem sectioni, vel erit in plano superficiem contingente, i. e. Sectionem continget.

In Parabolâ erit A B semper extra superficies conicas; Unde I L (per prop. *7*.) vel sectioni denuo occurret, vel eandem continget.

In Ellipsi, manifestum est (ex prop. 7.) I L per punctum quodvis in sectione I ductam eidem denuo oc- 27.

currere, vel saltem sectionem in eodem puncto I contingere.

28. *Coroll.* Hinc si per punctum quodvis B in sectione
29. conicâ vel utrâvis sectionum oppositarum, ducatur recta
30. B C, quæ sit rectæ cuivis I L quæ sectioni vel sectio-
31. nibus oppositis in duobus punctis occurrit; vel quæ sectionem, vel alterutram sectionum oppositarum contingit, parallela; Eadem vel sectioni denuo, vel sectioni oppositæ occurret in C, vel saltem sectionem continget. Nam eo ipso, quod parallela sit rectæ I L, liquet non esse ex rectarum I K numero; eademque erit ipsius, atque I L ratio.

Supple unum casum sectionum oppositarum.

Prop. XIII. Theor. XII.

32. *Positis iis quæ in Hyperbolæ & oppositarum sectionum definitione; Si duo plana* A D I, A E K *superficies conicas secundum rectas* D A d, E A e *tangentia, planum sectionum productum secent in rectis* I M i, K M k; *Dico rectas* I M I, K M k *quantumvis productas neutri sectionum oppositarum occurrere.*

Nam superficies conicæ, (in quibus sectiones sitæ sunt) & plana tangentia (in quibus sunt rectæ I M i K M k) sibi mutuo non occurrunt nisi in rectis D A d, E A e, quæ (ob plana parallela) sunt extra planum sectionum; Igitur rectæ I M i, K M k sectionibus non occurrunt.

Def. Petito ex re nomine, hujusmodi rectæ vocantur *Asymptoti.*

32. *Coroll.* 1. Omnis recta A B in plano sectionum op-
33. positarum utrivis asymptoto parallela, uni sectionum oppositarum idque in unico puncto B occurrit, manetque ex una parte intra, ex altera extra sectionem. Nam in cono hujusmodi recta utrivis I M, vel K M parallela, erit (ob plana parallela) etiam rectæ D A vel E A parallela; Unde liquet per prop. 6.

32. *Coroll.* 2. Omnis recta M C per asymptoton occursum

ſum M intra angulum I M K ducta, Atque omnis recta DE, quæ ad plagas ſectionum oppoſitarum ſecat utramque aſymptoton, producta utrique ſectionum oppoſitarum occurret. Nam in cono erunt neceſſario parallelæ rectis aliquibus in plano D A E, intra Ang. D A E cadentibus, unde patet per prop. 7. 33.

Coroll. 3. Recta O H N hyperbolam utcunque in H 34.
contingens producta utrique aſymptoto occurret in O, N extra earum occurſum M, & ad eaſdem partes cum ſectione. Nam ſi dicatur tranſire per M, vel eas ad plagas oppoſitas ſecare, vel earum alteri parallelam eſſe, per jam oſtenſa ſecabit ſectionem; Reſtatque ſolummodo caſus propoſitus.

Coroll. 4. Unde quæ binæ O H N, A B C eandem 35.
hyperbolam contingunt, concurrunt neceſſario in D, intra angulum O M N aſymptotis contentum. Quæ vero O H N, a b c oppoſitas ſectiones contingunt, productæ concurrunt intra Angulum a M N, vel c M O qui eſt angulo O M N deinceps; Vel ſaltem ſunt inter ſe parallelæ.

Coroll. 5. Recta *B* C conjungens bina puncta in hy- 36.
perbola B, C, utrique aſymptoto occurrit ad eaſdem partes cum ſectione; Nam ſi earum uni parallela ſit, occurret ſectioni in unico puncto (per *Coroll.* 1.) contra hypotheſin. Sin utrique occurrat, ſed ad partes oppoſitas, ſectioni oppoſitæ occurret (per *Coroll.* 2.) unde ſectionibus oppoſitis in tribus punctis occurret quod (per *Coroll.* 5. ad *def.* præced.) fieri nequit.

Coroll. 6. Hyperbola & aſymptoti quantumvis pro- 37.
ductæ non concurrunt, propius tamen ad ſe invicem accedunt quam pro dato quovis intervallo. Dato, ab utravis aſymptoto M A, intervallo A B, ductâque B D eidem aſymptoto parallelâ, ſecabit hæc (per *Coroll.* 1.) Sectionem alicubi in G; Unde liquet propoſitum.

Coroll. 7. Ex jam oſtenſis hoc quoque manifeſtum eſt, 34.
Pro vario ſitu puncti H (in *Coroll.* 3.) reſpectu puncti M, punctorum N, O alterum ad punctum M accedere recedente altero, prout ad has vel illas partes punctum

ctum H abierit; At vero eorum neutrum prius puncto M coincidere, quam punctum contactûs H ad distantiam infinitam migraverit; Quo in casu contingens OHN in asymptoton degenerat; Vel quod idem est, Asymptotos ad punctum ab M infinite distans sectionem contingit.

Prop. XIV. Theor. XIII.

38. *Iisdem positis, quæ in præcedentibus; sit* IFGK *plani hyperbolæ, vel sectionum oppositarum, intersectio cum plano basis, occurrens asymptotis in* I, K, *sectioni vero in* F, G; *Si, per punctum quodvis in utrâvis sectionum oppositarum* H, *agatur recta* OHN, *rectæ* IK *parallela, asymptotis occurrens in* O, N, *&* *sectioni denuò in* R, *vel eandem fortè in* H *contingens; Dico* $IF \times FK = KG \times GI = OH \times HN = NR \times RO$.

Planum basis in quo est recta IK, planumque per ON huic parallelum, facient in superficie conicâ circulorum circumferentias DFGE, PHRQ, quas eorundem planorum intersectiones cum planis, asymptotos formantibus, *viz.* DI, EK, PO, QN contingent in D, E, P, Q; & ob plana parallela erit $DI = PO$ & $EK = QN$; Si contingentes coeant in L, l, erit (ob circulum) $LE = LD$, $lQ = lP$, unde (ob sim. triang.) $LI = LK$, & $lO = lN$, i e. $EK = DI =$ (prius) $PO = QN$; erit ergo $EKq =$ (ob circulum) $KG \times KF = DIq = IF \times IG = POq = OH \times OR = QNq = NR \times NH$: Cum sit autem

$$\left.\begin{matrix} IF \times IG \\ IF \times IK - IF \times GK \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} GK \times KF \\ GK \times IK - IF \times GK \end{matrix}\right.$$

erit $IF \times IK = GK \times IK$, i e. $IF = GK$; Parique modo erit $OH = RN$; Unde $IF \times IG = IF \times FK = KG \times GI = OH \times OR = OH \times HN = NR \times RO$.

Si contingentes sint parallelæ, erit (ob parallelas rectas) $DI = EK = QN = PO$. eodemque prorsus modo procedit demonstratio.

Si

Si OHN contingat hyperbolam, continget & circulum; Unde $PO = OH = QN = NH$, & $POq = OHq = QNq = NHq = OH \times NH = DIq =$ (ut prius) $IF \times FK = KG \times GI$.

Scholium. Ostendi posset $IF = GK$, ductâ per L diametro LST, vel (si contingentes sint parallelæ) diametro his parallelâ, bisecante DE in S, proindeque IK & FG in T; unde $IF = GK$; parique modo $OH = RN$; vel (in casu contactûs) $OH = HN$. Et, quoad cætera, demonstratio esset eadem.

Prop. XV. Theor. XIV.

In Hyperbola vel sectionibus oppositis, si binæ quælibet 39.
rectæ inter se parallelæ, & vel utraque ad eandem 40.
Sectionem, vel utraque ad oppositas, vel singulæ ad singulas, utrinque in punctis B, C, F, G, *terminatæ; vel quarum una vel utraque sectionem, vel sectiones oppositas contingit ut in* C, G, *si opus productæ, utrique asymptoto occurrant in* A, D, E, H; *Dico rectangula* $AB \times BD$, $EF \times FH$, $CD \times CA$, $GH \times GE$ *esse sibi invicem æqualia.*

Si hæ rectæ parallelæ sint intersectioni plani sectionis cum plano basis, hæc propositio non differt à præcedenti; Sin minus, per punctorum B, C, G, F bina quælibet ex. gr. C, G agantur ad asymptotos usque rectæ ICK, LGQ, quæ intersectioni plani sectionis cum plano basis parallelæ intelligantur; Erunt itaque (ob rectas parallelas) triangula DCK, HGQ similia; uti etiam ICA, LGE Unde

$IC : CA :: LG : GE$ &

$CK : CD :: GQ : GH$ ductisque in se ordinatim antecedentibus & consequentibus, erit $IC \times CK : CA \times CD :: LG \times GQ : GE \times GH$. sed $IC \times CK =$ (per Prop. præced.) $LG \times GQ$; Ergo $CA \times CD = GE \times GH$. Pari omnino modo (Actis per reliqua puncta B, F rectis, ipsis ICK, LGQ parallelis) demonstrabitur $AB \times BD = CD \times CA = EF \times FH$, &c.

Coroll. 1. Hinc $CD = BA$, nam 39.

39. 40. $$\left.\begin{array}{r} AB \times BD \\ AB \times BC + AB \times CD \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} CD \times CA \\ CD \times BC + DC \times AB, \end{array}\right.$$
demptoque communi, erit $AB \times BC = CD \times BC$, *i. e.* $AB = CD$. Eodem modo $EF = GH$.

39. 40. *Coroll.* 2. Unde $AB \times AC = AB \times BD = EF \times FH$
$= EF \times EG$. &c.

41. *Coroll.* 3. Recta ACD sectionem in C contingens, &
ad asymptotos in A,D terminata à contactu C bisecatur.
Nam AB ubique $= CD$; & in hoc casu coincidunt
42. puncta B, C. Similiter si BC ad sectiones oppositas terminata per asymptotôn occursum transeat, ibidem bisecabitur. Nam CD ubique $= AB$, *i. e.* $CA = DB$; & in hoc casu coincidunt A, D.

41. *Coroll.* 4. Unde in casibus Corollarii 3^{ii} erit $EF \times FH$
42. $= ACq = BDq$ &c.

43. *Coroll.* 5. Coroll. 3^{m}. valet conversim. Nempe si recta ACD ad asymptotos in A, D terminata & sectioni occurrens in C ibidem bisecetur, eadem sectionem in C continget. Nam si sectioni denuo occurrat in B, erit
42. $AC = BD = CD$, hoc est, punctum B non erit à puncto C diversum. Similitèr si CB ad asymptoton in D bisecetur, Erit D communis asymptotôn occursus.

44. *Coroll.* 6. Binæ rectæ sectiones oppositas contingentes inter se parallelæ & ad asymptotos terminatæ dca, DCA, sunt æquales. Nam $dc \times ca = DC \times CA$ & $dc = ca$, $DC = CA$.

44. *Coroll.* 7. Conjungens tactus contingentium parallelarum Cc per asymptotôn occursum M transit. Nam per M ductâ CM & productâ; Hæc, ob AD in C bisectam, bisecabit huic parallelam *ad*, hoc est, transibit per *c*, unde non erit à Cc diversa.

Lemma 2.

45. *In rectâ* AD *factâ utcunque* $AB = CD$, *sumptoque in*
46. *eadem quovis puncto* E; *Si* E *cadat inter* B, *&*
47. C, *dico*

$BE \times EC = AE \times ED - AC \times CD$; *vel*

BE ×

$BE \times EC + AC \times CD = AE \times ED$. *vel &c.*

2\. *Si* E *cadat inter* C, *&* D, *vel (quod eòdem redit) inter* A, *&* B, *erit*

$BE \times EC = AC \times CD - AE \times ED$; *vel*

$BE \times EC + AE \times ED = AC \times CD$. *&c.*

3\. *Si* E *sit in* AD *productâ*, *erit*

$BE \times EC = AE \times ED + AC \times CD$; *vel*

$BE \times EC - AE \times ED = AC \times CD$. *&c.*

Nam in primo casu

$$AE \times ED = AB \times EC + AB \times CD + BE \times EC + BE \times CD$$ 45.

$$AC \times CD = AB \times CD + BE \times CD + \left\{ \begin{matrix} EC \times CD \\ EC \times AB \end{matrix} \right.$$

Unde $AE \times ED - AC \times CD = BE \times EC$.

In secundo casu,

$$AC \times CD = AB \times ED + BC \times ED + \left\{ \begin{matrix} AB \times CE \\ CD \times CE \end{matrix} \right\} + BC \times CE,$$ 46.

$$AE \times ED = AB \times ED + BC \times ED + \left\{ \begin{matrix} CE \times ED \\ CE \times CD - CEq; \end{matrix} \right.$$

Unde

$$AC \times CD - AE \times ED = BC \times CE + CEq = BE \times EC.$$

In tertio casu,

$$BE \times EC = \left\{ \begin{matrix} BC \times DE + \left\{ \begin{matrix} CD \times DE \\ AB \times DE \end{matrix} \right\} + DEq + CD \times DE \\ AE \times ED \end{matrix} \right\}$$ 47.

$$+ \left\{ \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} CDq \\ AB \times CD \end{matrix} \right\} + BC \times CD \\ AC \times CD. \end{matrix} \right\}$$

Schol. Coincidentibus punctis B, C, in primo casu coincidit his punctum E, & evanescit $BE \times EC$.

Coincidentibus vero B, C, transit casus secundus in illum 5, El. 2. tertius in 6, El. 2. ut cuivis obvium. 48. 49.

Prop. XVI. Theor. XV.

50. 51. *In Hyperbola & sectionibus oppositis, si binæ quælibet*
52. 53. *rectæ* KN, ST, *vel utraque ad eandem sectionem,*
54. 55. *vel utraque ad oppositas, vel singulæ ad singulas, vel*
56. *altera ad eandem, altera ad oppositas in* K, N; S, T, *utrinque terminatæ, & si opus productæ, sibi mutuo occurrant in* E, *& utrique asymptoto in* R, V, M, L; *Dico*

$$\left.\begin{matrix} KM \times MN \\ LN \times MN \end{matrix}\right\} : RT \times TV :: KE \times EN : SE \times ET.$$

57. 58. 2. *Idem erit de quadratis hujusmodi rectarum, quoties*
59. 60. *harum una vel utraque sectionem, vel utramque sectionum oppositarum, contingit, vel harum una per asymptotôn occursum transit.*

50. 51. Per utriusvis rectarum NK utrumlibet occursum
52. &c. cum sectione N, agatur recta XNY, rectæ alteri ST parallela, asymptotis occurrens in X, Y; erunt triangula LNY, LER similia, uti etiam MNX, MEV; Unde

LE : LN :: ER : NY

ME : MN :: EV : NX. Ductisque &c.

LE × ME : LN × MN :: ER × EV : NY × NX id est (per lemma præced.) pro vario situ puncti E, & per prop. 15. cum *Coroll.* 2.

$$\left.\begin{matrix} KE \times EN + KM \times MN \\ KM \times MN - KE \times EN \\ KE \times EN - KM \times MN \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} LN \times MN \\ \text{id est} \\ KM \times MN \end{matrix}\right) :: \left(\begin{matrix} SE \times ET + RT \times TV \\ RT \times TV - SE \times ET \\ SE \times ET - RT \times TV \end{matrix}\right) : \left(\begin{matrix} NY \times NX \\ \text{id est} \\ RT \times TV \end{matrix}\right.$$

Unde in primo & secundo casu div. in tertio comp. KE × EN : KM × MN :: SE × ET : RT × TV, unde alternando liquet propositum.

2. Ostensum est in parte prima KM × MN : RT × TV :: KE × EN : SE × ET : unde coeuntibus punctis K & N, T & S vel M & L &c. erit

Fig. 57. 58. KMq : RT × TV :: KEq : SE × ET.

Fig. 60. KMq : RT × TV :: KE × EN : SE × ET.

Fig. 59. KMq : RTq :: KEq : TEq. Et sic in cæteris casibus.

Scholium. Coeuntibus punctis K, N; S, T &c. Lemma

ma præcedens in hac demonstratione adhibitum non differt à 5, vel 6, El. 2, ut supra adnotavimus.

Coroll. Si angulus asymptotôn rectus intelligatur, & rectarum una KN, parallela sit, vel coincidat rectæ alicui ACB per asymptotôn occursum C transeunti, altera vero ST parallela rectæ DB in occursu rectæ AB unam sectionum oppositarum contingenti; Erit KE × EN = SE × ET. Nam ob ang. rect. & DB = BI, erit per 31. El. 3tii. CBq = DBq, & (per *Coroll.* 4. prop. 15.) RT × TV = DBq, & KM × MN = CBq. & sic in cæteris casibus. 56.

Prop. XVII. Theor. XVI.

In Hyperbola & Sectionibus oppositis si Recta quævis AB *ad eandem, vel ad oppositas sectiones utrinque terminata, & si opus producta, Vel binæ quælibet rectæ* AB, CD *inter se parallelæ, & vel utraque ad eandem sectionem, vel utraque ad oppositas, vel singulæ ad singulas utrinque terminatæ, & si opus productæ, Binis quibuscunque* FG, IH *inter se parallelis, & vel utrisque ad eandem sectionem, vel utrisque ad oppositas, vel singulis ad singulas utrinque terminatis, & si opus productis utcunque occurrant, ut in* E, T, *vel* E, T, S, V *punctis; Erunt rectangula ex segmentis ejusdem rectæ, vel binarum inter se parallelarum, proportionalia rectangulis ex conterminis segmentis binarum reliquarum, hoc est* 61. 62. 63. 64. 65. *Supple figuras reliquarum casuum.*

AE × EB : GE × EF :: AT × TB : IT × TH, &
AE × EB : GE × EF :: CV × VD : HV × VI. &
sic de binis quibusvis punctis.

2. *Sin recta quævis* AET *utrivis asymptoto parallela, sectioni in unico puncto* A *occurrens, binis istiusmodi parallelis* IHT, FGE *occurrat in* T, E; *erit* 66. 67. *Supple figuras reliquarum casuum.*

HT × TI : GE × EF :: TA : EA.

Eadem de rectarum contingentium quadratis intellige.

Rectæ omnes (si opus productæ) occurrant asymptotis in O, P, Q, R &c. ut in figuris. Erit ex præcedenti

$$AE \times EB : GE \times EF :: AO \times OB : GK \times KF$$

$$\& \; AT \times TB : IT \times TH :: AO \times OB \left\{ \begin{matrix} HM \times MI \\ GK \times KF \end{matrix} \right\}$$

Unde $AE \times EB ; GE \times EF :: AT \times TB : IT \times TH$.
Pari modo ob $AO \times OB = CQ \times QD$ & $GK \times KF = HM \times MI$ probabitur

$$AE \times EB : GE \times EF :: CV \times VD : HV \times VI.$$

Nec aliter ratiocinabere de cæteris punctis; & in casibus contingentium.

66. 67. *Supple casus omissos.* 2. Sit asymptoton occursus B, & connectatur BA, Per puncta T, E ipsi BA parallelæ, agantur DTS, KEN; quæ occurrent necessariò utrique asymptoto in D, S; K, N, adeoque (per Coroll. 2. prop. 13.) utrique sectionum oppositarum in O, P; L, M; sint vero K, D puncta in asymptoto ipsi AET parallela.

Erit (ob parallelas rectas) $AB = DT = KE$ & $BK = AE$, $BD = AT$.

Porro (ex priore parte, & ex lemmate 2.) erit in casu Figuræ 66,

$$HT \times TI : GE \times EF :: \left\{ \begin{matrix} OT \times TP \\ DT \times TS + OS \times SP \\ AB \times TS + ABq \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} LE \times EM \\ KE \times EN + LN \times NM \\ AB \times EN + ABq \end{matrix} \right\}$$

$$:: \left\{ \begin{matrix} TS + AB \\ DS \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} EN + AB \\ NK \end{matrix} \right\} :: (\text{ob sim. triang.}) \left\{ \begin{matrix} DB \\ TA \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} KB \\ EA \end{matrix} \right\}$$

Nec aliter in casu contactûs.

Eodem modo, per Lemma 2. (pro vario situ punctorum T, E, mutatis mutandis) patebit in omnibus casibus.

Prop. XVIII. Theor. XVII.

68. 69. 70. 71. 72. *Supple reliquos casus.* *Quæ in Hyperbola, & sectionibus oppositis superiori propositione ostendimus, propositum sit in Ellipsi & Parabola ostendere. Scilicet, (posito rectas* RO, LM, *parallelas, sectionique in* R, O, L, M, *occurrentes, rectis* HF, YZ *parallelis, & sectioni in* H, F, Y, Z *occurrentibus,*

occurrentibus, in punctis G, E, X, V, *occurrere,) erit*

$$GO \times GR : LE \times EM :: HG \times GF : HE \times EF$$

$$GO \times GR : HG \times GF :: LX \times XM : ZX \times XY$$

& sic de binis quibusvis punctis.

2. *Sin Recta* F H *occurrens Parabolæ in unico puncto* 75.
F, *occurrat parallelis* R G O, L E M, *in* G, E; *erit* Supple reliquos casus.

$$FG : FE :: GO \times GR : LE \times EM.$$

Eadem de contingentium quadratis intellige.

In Ellipsi, vel Parabola in Conica superficie factâ, 73. 74.
sint rectæ eædem quæ in figuris 68, 69. &c. neglectâ Supple casus reliquos.
tantum in præsens rectâ Z Y.

Per rectarum R O, L M alterutram R O, & coni verticem I transeat planum R I O, secans superficies conicas in rectis I R, I O; Secundum quas plana I R K, I O N superficies contingant, se mutuo secantia in I T, & planum sectionis in R K, O N.

Per L M transeat planum, plano R I O parallelum, faciens sectiones oppositas L D M A S, secansque plana tangentia in rectis T K, T N quæ erunt propterea asymptoti.

Per H F & coni verticem I transeat planum, secans superficies conicas in rectis H I A, I D F, planum R I O in I G, planum sectionum in A B C D E, planaque asymptotos formantia in I B, I C. In fig. 74. rectam IC, vitanda confusionis ergô non expressimus.

Recta A D est ad alteram, sive utramque sectionum oppositarum in A, D terminata, occurritque asymptotis in B, C.

Per punctum D, in plano sectionum oppositarum agatur, usque ad asymptotos, recta P D Q parallela K L E M N.

Ob plana parallela, & rectas parallelas P D Q, K L E M N, similia erunt triangula R G I, & P D B; G I O, & D C Q. Pariter H I G & H A E; F D E, & F I G, Unde

$$IG : DE :: GF : FE \;\&$$

$$IG : AE :: HG :: HE \text{ Ductisque \&c.}$$

$IGq : AE \times DE :: HG \times GF : HE \times FE$. Rursum

IG

$IG:GO::CD:DQ$

$IG:GR::BD:DP$ Ductisque &c.

$$IGq:GO\times GR::CD\times BD:\left\{\begin{matrix}DQ\times DP\\ KM\times MN\end{matrix}\right\}$$

:: (per prop. 16.) $AE\times ED:LE\times EM$ & altern. $IGq:AE\times ED::GO\times GR:LE\times EM::$ (prius) $HG\times GF:HE\times FE$.

Probandum restat

68, 69. $RG\times GO:HG\times GF::LX\times XM:ZX\times XY$

70, 71. Jam vero ostendimus

72. $RG\times GO:HG\times GF::LE\times EM:HE\times EF$

Supple reliquos casus. & pari ratione erit

$LE\times EM:HE\times EF::LX\times XM:ZX\times XY$

unde

$RG\times GO:HG\times GF::LX\times XM:ZX\times XY$

Pariter de punctis E, V. Nec aliter in rectis contingentibus

75. & Fig. 26. *supra.* *Supple reliquos casus.* 2. Factis ut in priore parte. Cum recta F H respondeat rectæ I K in fig. prop. 12, pro Parabola, recta I A quæ fit à plano per rectam F H & verticem I respondebit rectæ A D in eâdem figura; hoc est, erit F H parallela I A unde $IG=AE$.

Estque ob sim. triang.

$FG:FE::IG:DE::IGq:IG\times DE=AE\times DE$

ostendetur verò ut supra

$IGq:AE\times DE::GO\times GR:LE\times EM$ unde $FG:FE::GO\times GR:LE\times EM$. Pariterque in casibus contactûs.

Scholium. Theorema hoc cum præcedenti licuisset simul unâ propositione complecti, eademque operâ è cono demonstrasse: Cum tamen in hyperbola & sectionibus opp. hæc proprietas etiam in plano se proderet, quo Tyronibus aliquatenus consultum esset, libuit seorsim demonstrare.

SECTIO

SECTIO II.

Prop. XIX. Theor. XVIII.

In omni Sectione conica, & Sectionibus oppositis, si binæ rectæ BI, CI *contingentes sectionem, vel sectiones oppositas in extremis rectæ cujusvis* BC, *sectioni, vel sect. opp. in binis punctis* B, C *occurrentis, concurrant in* I, (*vel in Ellipsi & sect. opp. sint forte inter se parallelæ*) *& ex utrâvis parte tactus conjungentis* BC *ducatur recta* EF, *ipsi* BC *parallela, quæ* (*si opus producta*) *occurrat sectioni, vel sectioni oppositæ, vel utrique sectionum oppositarum in binis punctis* E, F, *& rectis contingentibus in* D, G; *Dico* DE = FG. 76. 77. 78. *Tam Parabola quam Ellipseos figura numero 76 (per errorem) designatur. Recta* OHN, QKR *spectant ad prop. seq.*

FActâ in superficie conica, sectione, vel sectionibus oppositis, positisque ut in prioribus figuris. Per coni verticem A ducantur AB, AC; Plana per rectas AB, BI & AC, CI superficiem contingent. 79. *Pro Hyperb. Parab. & Ellipsi. Supple figuram sect. opp.*

Per DEFG transeat planum, plano ABC parallelum, faciens sectionem vel sectiones EKF, & secans plana tangentia in DH, HG; Erit EKF hyperbola, vel sectiones oppositæ; eruntque HD, HG asymptoti, ac proinde DE = FG.

In Hyperbola & sectionibus oppositis, hæc propositio in plano demonstrari potest in hunc modum.

Sint AV, AT asymptoti, occurrentes contingentibus (si opus productis) in T, V, rectæ BC (si opus productæ) in X, Y, & rectæ DG in R, S; bisectâque BC in M, juncta IM [vel ∥ BI, CI] secet EF in L. 77. 78.

Per prop. 16, IBq : ICq :: BTq : VCq; ergo BC & TV parallelæ sunt, unde (ob BM = MC) recta IM bisecabit connexam TV in Z.

Rursus (ob BX = YC & BM = MC) erit XM = MY

= M Y ; si ergo per asymptotôn occursum A ducatur recta A M, hæc (propter parallelas X Y, T V & bisectas in M, Z) transibit per Z, hoc est non differet ab I M primo ductâ.

Jamque (ob B M = M C,) erit D L = L G ; & (ob X M = M Y) erit R L = L S ; unde D R = S G ; sed & R E = S F, unde D E = G F.

Coroll. 1. D F = G E.

Coroll. 2. Si (coeuntibus punctis E, F,) recta D G sectionem contingat, à tactu bisecabitur. Si vero puncta E, F sint ad sectiones oppositas, recta D G in contingentem abire non potest, ut ex supra dictis manifestum.

Prop. XX. Theor. XIX.

76. 77. 78. *Supple figuras contingentium parallelarum.*

Iisdem positis, Si per contingentium occursum I, *& medium punctum* M *tactus conjungentis B C, ducatur recta* I M; *vel si contingentes sint parallelæ, per* M *ducatur* I M *ipsis contingentibus parallela, Hæc rectas omnes* E F *ipsi* B C *parallelas, & ad sectionem vel sectiones oppositas utrinque terminatas, bifariam secabit.*

Nam ob similia triang. I B C, I D G & B M = M C, erit etiam D L = L G; estque (per præced.) D E = F G, & D F = G E, unde additis vel demptis æqualibus erit L E = L F.

Si contingentes sint parallelæ, erit B M = D L = M C = L G &c. ut prius.

Def. Rectæ I M hoc modo genitæ, atque infinitè extensæ *Diametri* appellantur.

Ipsæ vero M C, vel M B, atque omnes his parallelæ L F, vel L E, intra sectionem, vel inter sectiones oppositas, dicuntur *Ordinatæ* ad diametrum I M.

Coroll. 1. Ob ordinatas sic bisectas in Hyperbola, & Parabola, (quarum curvæ post B C infinite se utrinque extendunt) diameter in unico tantum puncto H sectioni

sectioni occurrit; In hyperbola tamen occurret, eâdem de causa, sectioni oppositæ in K. Ellipsi occurret in binis punctis H, K. Inter sectiones oppositas neutri earum omninò occurrit.

Def. In Hyperbola, vel Sect. opp. & Ellipsi, Diametri infinite extensæ pars H K *Diameter transversa* dicitur. 76. 77.

Et in omnibus sectionibus punctum H, vel K *Vertex* dicitur; & in opp. Sect. & Ellipsi dicitur vertex K vertici H *Oppositus*, & vicissim.

In oppositis sectionibus Diametri H K utrique sectioni occurrentes vocantur Diametri *Determinatæ*; Diametri vero inter sectiones *Indeterminatæ*. Utriusque nominis ratio in aperto est. 77. 78.

In omnibus sectionibus partes H M, H L, vel K M, K L vocantur *Diametri Interceptæ* vel *Abscissæ*. 76. 77.

Coroll. 2. In Hyperbola & Ellipsi; cum sit $BM \times MC = MCq$, $EL \times LF = LFq$ erit (per prop. 17. & 18.) $KM \times MH : KL \times LH :: MCq : LFq$. Et sic ubique.

Coroll. 3. In Parabola, cum Diametri in unico tantum puncto H sectioni occurrant, liquet (per prop. 12.) eas non diversas esse à rectis I K factis à plano per contactum A D, planumque sectionis in I K secante; adeoque (ob planum A D E plano sectionis parallelum,) esse omnes inter se parallelas; Et porro idem præstare, quod eædem rectæ I K in prop. 18. 76. & *In fig. prop. 12 pro Parabola.*

Coroll. 4. Et propter ordinatas bisectas, (per prop. 18.) Erit in Parabola 76.

$HM : HL :: MCq : LFq$; Et sic ubique.

Coroll. 5. Per *Coroll.* 2. liquet ordinatas ad quamlibet diametrum in Ellipsi, quo magis ab utroque vertice distant, eo majores esse, donec ad medium diametri punctum deventum sit; Eritque ordinata per hoc punctum maxima. Et quæ binæ æqualiter ab utroque vertice distant sunt æquales; Et conversim. Ita enim se res habet in rectangulis ex segmentis diametri, quibus ordinatarum conterminarum quadrata proportionalia sunt. 76.

76. 77. *Coroll.* 6. Similiter in Hyperbola & Parabola, quo longiùs ordinatæ à diametri vertice distant, eo sunt majores. Et in oppositis sectionibus, quæ binæ æqualiter ab utroque ejus vertice distant, sunt æquales; Et conversim.

76. 77. *Coroll.* 7. In Hyperbola & Parabola, quarum curvæ infinite se extendunt, fiunt tandem ordinatæ datâ quâvis rectâ lf majores. Nam si in Hyperbola ita sumatur punctum L ut sit K L × L H : K M × M H = lfq : M C q erit (propter *coroll.* 2.) L F = lf. Eodem modo (mutatis mutandis) liquet in Parab. per *Coroll.* 4. Unde porrò recta diametro cuivis parallela, sectioni, vel utrique sectionum oppositarum necessariò occurret.

76. 77. *Coroll.* 8. In omni sectione, Quæ H N, vel K P per verticem H, vel K ducitur ordinatis parallela, Sectionem contingit; Et conversim. Nam si aliqua ejus pars sit intra sectionem, à diametro bisecabitur, quæ tamen huic non occurrit nisi in ipsa sectione. 2. Quæ in H vel K contingit, erit ordinatis parallela. Nam binæ rectæ diversæ in eodem puncto non contingunt.

80. 81. *Coroll.* 9. In Ellipsi & Sectionibus oppositis, Recta H K conjungens tactus contingentium parallelarum est diameter rectarum B C, E F hisce contingentibus parallelarum. Nam si quævis alia V R dicatur earum diameter, rectæ in ejusdem extremis V, R, rectis B C, F E parallelæ, (per præced. *Coroll.*) sectionem contingent, unde aut plures duabus rectis parallelis sectionem, vel sect. opp. contingent, contra *Coroll.* 5. prop. 11, aut non erit V R ab H K diversa.

80. 81. *Coroll.* 10. In omni sectione conicâ, & in sect. opp.
82. 83. & inter sect. opp. Quæ binas rectas inter se parallelas, vel utrasque ad eandem sectionem, vel utrasque ad oppositas, vel singulas ad singulas utrinque terminatas, bisecat, Erit harum, atque omnium his parallelarum diameter. Nam propria diameter has bisecat, & binæ rectæ à se invicem diversæ has bisecare non possunt.

80. 81. *Coroll.* 11. Et in omnibus sectionibus, & in sect.
82. opp.

opp. ſi recta H O in quovis puncto H ſectionem, vel utramvis ſectionum oppoſitarum contingat, atque huic parallela quævis B C ſectioni, vel utrivis ſectionum oppoſitarum in punctis B, C occurrat, Recta H M, quæ tactum H, & medium punctum M rectæ B C conjungit, erit hujus atque huic parallelarum diameter. Patet ut *Coroll.* 9.

Coroll. 12. In Parabola, Si in puncto quolibet H contingat H O, ſitque huic parallela quælibet B C utrinquè ad ſectionem terminata; Quæ H M per tactum H ducitur diametro cuivis S T parallela, erit rectæ B C, atque huic parallelarum, diameter. Nam harum diameter (per *Coroll.* præced.) per H tranſit, & (per *Coroll.* 3.) eſt parallela S T, ideoque non eſt ab H M diverſa. 82.

Coroll. 13. Parabolæ diameter, præter ordinatas ſuas, nullam rectam utrinque ad ſectionem terminatam biſecat. Nam propria diameter hanc biſecat, Et à duabus rectis parallelis, à ſe invicem diverſis, biſecari nequit.

Coroll. 14. Ideoque in Parabola, duæ rectæ ad ſectionem utrinque terminatæ ſe mutuo non biſecant.

Coroll. 15. Contingens parabolam omnibus diametris productis occurrit. Et quælibet recta utrinque ad parabolam terminata & ſi opus producta, omnibus diametris ſi opus productis occurrit. Nam quæ uni parallelarum occurrit, occurrit omnibus. 82.

Coroll. 16. Si in Parabolâ recta quævis H M, diametro cuivis S T parallela, rectam quamvis B C utrinque ad ſectionem terminatam biſecet, Erit hujus atque huic parallelarum diameter. Nam omnes diametri ſunt parallelæ (per *Coroll.* 3.) Et (per 13.) præter ordinatas ſuas nullam omnino rectam ad ſectionem utrinque terminatam biſecant. 82.

Coroll. 17. In omnibus ſectionibus, & ſectionibus oppoſitis, ex diametrorum geneſi liquet Contingentes in extremis rectæ cujuſvis B C, ad diametrum quamlibet H *b* ordinatæ, ſuper eâdem diametro coire in aliquo puncto I; aut eſſe eidem parallelas. 76. 77. 78.

Prop.

Prop. XXI. Theor. XX.

84. 85. *In Ellipsi, & sectionibus oppositis, Quæ* DHE *per medium punctum* H *diametri cujusvis* AB (*quæ in opp. sect. sit determinata*) *utcunque ducitur, Sectioni vel sectionibus oppositis in punctis* E, D *occurrens, à puncto* H *bifariam dividitur.*

Si DHE sit ad diametrum AB ordinata, jam liquet propositum. Sin minùs; è punctis E, D intelligantur ordinatæ ad diametrum AB, rectæ EG, DF; Quæ parallelæ cum sint, erunt triangula HEG, HDF simisimilia;

Per *Coroll.* 2. præced. erit
BF×FA : BG×GA :: DFq : GEq :: (propter sim. triang.) FHq : GHq unde alternando, & componendo in Ellipsi, dividendo in oppositis sectionibus,

$$\left.\begin{matrix} BF\times FA + FHq \\ FHq - BF\times FA \\ i.e.\ HAq \end{matrix}\right\} : FHq :: \left\{\begin{matrix} BG\times GA + GHq \\ GHq - BG\times GA \\ i.e.\ HAq \end{matrix}\right\} : GHq$$

Unde FH = GH & ob sim.triang. inde DH = HE.

Prop. XXII. Theor. XXI.

86. 87. *In Hyperbola, vel oppositis sectionibus, omnes diametri coeunt in occursu asymptotôn* H, *quarum determinatæ ibidem se mutuò bisecant. Et in Ellipsi omnes diametri coeunt, & se mutuò bisecant, in communi quodam intra sectionem puncto* H.

86. Cum diametri determinatæ in hyperbola vel opp. sect. jungant tactus contingentium parallelarum, transeunt omnes (per *Coroll.* 7. prop. 15.) per punctum H, & (per *Coroll.* 3. ejusdem prop. 15.) ibidem bisecantur. Indeterminatæ vero bisecant omnes ordinatas suas inter sectiones, quarum una necessariò per H transit, & ibidem bisecatur; Omnes itaque diametri indeterminatæ pariter per H transeunt.

In

In Ellipsi, si per duarum quarumlibet diametrorum A B; E D media puncta C, H ducatur F C H G, sectioni utrinque occurrens, hæc (per præced.) tam in C, quam in H bisecabitur; Coeunt itaque puncta C, H; unde liquet propositum. 87.

Def. Punctum H *Centrum*, dicitur. 86. 87.

Corollaria ad hanc & præcedentes aliquot propositiones.

Coroll. 1. Omnis recta E H per punctum quodvis E Ellipseos, vel utriusvis sectionum oppositarum, & centrum H ducta, est diameter rectarum contingenti in puncto E parallelarum. 88. 89.

Coroll. 2. Et omnis recta H M, per centrum H, & medium punctum M rectæ cujusvis B C ad Ellipsim, vel hyperbolam, vel sectiones oppositas utrinque terminatæ, ducta, est hujus atque huic parallelarum Diameter. 88. 89.

Nam bisecabit ad centrum (per prop. præced.) rectam rectæ B C parallelam; unde (per *Coroll.* 10. prop. 20.) erit harum diameter.

Coroll. 3. In Ellipsi, & Hyperbolâ, & inter sectiones oppositas; Diameter, præter ordinatas suas, nullam rectam ad sectionem, vel sectiones oppositas terminatam (nisi in centro) bisecat. Nam omnis hujusmodi recta à propria diametro bisecatur, & à binis rectis à se invicem diversis (nisi in communi earum occursu) bisecari nequit.

Coroll. 4. Atque hinc binæ rectæ ad Ellipsin, Hyperbolam, vel Sectiones oppositas, terminatæ (nisi in Centro) se mutuò non bisecant.

Coroll. 5. In oppositis Sectionibus, & in Ellipsi, partes oppositæ à quavis diametro A B abscissæ suprapositæ congruunt. Nam ductâ aliâ quâvis diametro E H D, & suprapositis figuris, congruent (ob æquales rectas & angulum communem) puncta H, A, D, punctis H, B, E respectivè; & sic de cæteris punctis. 86 87.

Coroll. 6. Unde ipsæ sectiones oppositæ supra positæ congruent. 86.

Prop.

Prop. XXIII. Theor. XXII.

90. 91. *In sectionibus oppositis, & in Ellipsi, Si per centrum* C *agatur recta* E D *diametri alicujus* A B (*quæ in opp. Sect. sit determinata*) *ordinatis* G I *parallela, Bisecabit hæc rectas omnes* F G *diametro* A B *parallelas, & ad sectionem, vel sectiones oppositas, utrinque in* F, G *terminatas. Et conversim.*

A punctis F, G intelligantur ad diametrum A B ordinatæ F H, G I; Ob rectas parallelas erit F H = G I, unde (per converſ. *Coroll.* 5. & 6. prop. 20.) A H = B I, & (ob A C = C B) H C = C I = (ob rectas parall.) G M = M F.

2. Si F G bisecetur à recta E D in M, erit parallela A B. Nam factis ut supra, Erit (ob F H parall. G I) F M : H C :: M G : C I *i.e.* (ob F M = ex hyp. M G) H C = C I, unde & A H = B I, & (per *Coroll.* 5. & 6. prop. 20.) F H = G I : Ergo cum sit H F || G I erit F G
90. 91. || A B.

Coroll. 1. Hinc recta F G est ad diametrum E D ordinata.

Def. Diameter E D infinitè extensa dicitur diametro
91. A B *Conjugata*.
90. In Ellipsi eadem utrinque in E, D ad Sectionem terminata, Vel in oppositis sectionibus, abscissis utrinque C D, C E, ut sint eædem contingentis in utrovis vertice B, ad asymptotos utrinque terminatæ, partibus B K, B L æquales, (proindéque æquales inter se) Dicitur D E *Secunda diameter* diametro A B *conjugata*, & vicissim.

Coroll. 2. Conjugatarum diametrorum ordinatæ sunt diametris suis reciproce parallelæ, Conjugatæ diametri sunt ad se mutuò ordinatæ, Et cujusvis diametri unica est conjugata.

90. *Coroll.* 3. Ordinatarum ad diametrum quamvis E D inter sectiones oppositas (*i. e.* indeterminatam) minima est

est quæ per centrum transit, & à centro remotiores sunt propioribus majores, fiuntque tandem datâ quâvis rectâ S T majores. Nam quo major est C M *i. e.* I G, eo major B I, & proinde eo major C I = M G. Sumptâque C I ⊏ S T ductâque I G parallelâ E D, & G M parallelâ I C, erit ordinata G M = C I, *i. e.* ⊏ S T.

Coroll. 4. In oppositis sectionibus, conjugatarum diametrorum una est determinata, altera indeterminata. Nam ordinata ad diametrum determinatam occurrit utrique asymptoto in P, Q ad easdem partes cum sectione, unde huic parallela extra angulum asymptotôn cadet. Et vice versa. 90.

Coroll. 5. Cum omnis recta per quodvis punctum in utrâvis sectionum oppositarum (modo asymptoto non parallela, nec sectioni oppositæ occurrens) eidem sectioni denuò occurrat, sitque ad diametrum aliquam determinatam ordinata, habeatque rectam aliquam per centrum extra angulum asymptotôn cadentem sibi parallelam; Atque omnis recta intra angulum asymptotôn cadens sit diameter determinata: Liquet omnes rectas per centrum ductas esse diametros; Exceptis tantummodò Asymptotis, quæ quasi limites sunt, qui determinatas diametros ab indeterminatis disterminant, & in quas diametri (ut de contingentibus jam olim dictum est) ultimò degenerant. Nam abeunte puncto B in infinitum, Contingens K B L (accedente puncto L ad C,) cumque hâc huic parallela E D, atque has conjungens C B, asymptoto C K omnes coincident, ut advertenti facilè patebit. 90.

In Ellipsi omnes omnino rectæ per centrum (per *Coroll.* 1. prop. 22.) erunt diametri.

Coroll. 6. In Hyperbolâ, vel oppositis sectionibus, & Ellipsi, Contingens in vertice cujuslibet diametri occurrit omnibus diametris, si opus productis, exceptâ duntaxat huic conjugatâ. Idem de ordinatis ad quamlibet diametrum (si opus productis) intellige.

Coroll. 7. In Hyperbolâ, & Ellipsi, C B q : C D q :: A I x I B : I G q. Nam in hyperbola, C D q = B L q, 90. 91.

&

& O I × I G = I G q, unde patet per prop. 16. In Ellipsi C B q = A C × C B, unde patet per *Coroll.* 2. prop. 20.

90. *Coroll.* 8. Si angulus asymptotôn sit rectus, erit ubique C B = C D, si acutus C B $\sqsubset$ C D, si obtusus C B $\sqsupset$ C D. Nam semicirculus diametro K L = E D in primo casu transibit per C, in secundo citrà, in tertio ultra C,
91. unde C B respectivè =, $\sqsubset$, $\sqsupset$ B L *i. e.* C D; si Ellipsis sit circulus erit ubique C B = C D.

Prop. XXIV. Theor. XXIII.

92. 93. *In Hyperbolâ & Ellipsi, sit quælibet diameter* D F, *(quæ tamen in hyperbolâ sit determinata) cujus vertex* D, *vertex oppositus* F, *secunda diameter huic conjugata* G B, *& ad* D F *quælibet ordinata* K N; *Fiat ipsis* F D : G B : *tertia proportionalis* L R, *in quâ (ultra* R *productâ in Hyperbolâ) sumatur punctum* M, *ut sit* F D : D K : : L R : M R; Dico N K q = F K × M R = D K × L M.

Ob F D : D K : : L R : M R erit componendo in Hyperb. dividendo in Ellipsi

$$\left.\begin{matrix} FD \pm DK \\ FK \end{matrix}\right\} : DK :: \left\{\begin{matrix} LR \pm MR \\ LM \end{matrix}\right\} : MR,$$

Unde F K × M R = D K × L M. Rursum ob F D : G B : L R $\div\!\div$ erit

F D : L R : : F D q : G B q : : (horum subquadrupla) C D q : C B q : : (per *Coroll.* 7. præced.) D K × F K : N K q : : (ex hyp.) D K : M R : : D K × F K : M R × F K, Ergo N K q = M R × F K = D K × L M.

Def. Recta LR dicitur *Latus rectum* sive *Parameter*. Rectangulum ex diametro quâvis & suâ parametro F D × L R vocatur *Figura* istius diametri.

Coroll. 1. In hyperbolâ, si angulus asymptotôn sit rectus, erit omnis diameter suæ parametro æqualis &c. patet ex *Coroll.* 8. præced.

Def. Hujusmodi vero hyperbola, ob transversam diametrum (quæ & Latus transversum quandoque dicitur)

parametro

parametro sive lateri recto æqualem, dicitur Hyperbola *Æquilatera*.

Coroll. 2. Si Ellipsis sit Circulus, erunt omnes parametri diametris suis & sibi ipsis æquales.

Coroll. 3. Et in quâlibet Ellipsi, binæ quælibet diametri conjugatæ sunt duæ mediæ proportionales inter earum parametros. Idem in Hyperbolâ intellige.

Coroll. 4. G B q $=$ figuræ diametri F D; & C B q $= \frac{1}{4}$ ejusdem fig.

Coroll. 5. D F : L R : : D K $\times$ F K : N K q. Patet supra. 92. 93.

Coroll. 6. Quadratum ordinatæ N K in Hyperbolâ excedit rectangulum ex parametro L R & diametro interceptâ D K, *i. e.* L R $\times$ D K, rectangulo D K $\times$ M R, quod simile est figuræ diametri F D $\times$ L R. Nam N K q $=$ D K $\times$ L M $=$ L R $\times$ D K $+$ M R $\times$ D K. Et F D : D K : : L R : M R, *i. e.* F D $\times$ L R simile D K $\times$ M R. 93.

Coroll. 7. In Ellipsi vero, Quadratum ex N K deficit à rectangulo L R $\times$ D K, rectangulo D K $\times$ M R, quod simile est figuræ diametri; Et à rectangulo L R $\times$ F K, rectangulo F K $\times$ L M, quod eidem figuræ etiam simile est. Nam N K q $=$ D K $\times$ L M $=$ R L $\times$ D K $-$ M R $\times$ D K; Et N K q $=$ F K $\times$ M R $=$ F K $\times$ L R $-$ F K $\times$ L M. Estque (ut prius in Hyperbolâ) F D $\times$ L R simile D K $\times$ M R, simile F K $\times$ L M. 93.

Schol. Ex hoc excessu & Defectu quadratorum ex Ordinatis, in HYPERBOLA, & ELLIPSI, Magnus ille è veteribus Geometra APOLLONIUS *Pergæus* hæc nomina sectionibus imposuit, quibus usa est omnis posteritas.

Prop. XXV. Theor. XXIV.

In Parabola, sit quælibet diameter D C, *& ad hanc quælibet ordinata* B C; *si interceptæ diametro* D C *& conterminæ ordinatæ* C B, *fiat tertia proportionalis* L R; *Dico quadratum ordinatæ cujusvis ad eandem diametrum* K N *æquale esse rectangulo ex eadem recta* L R *& interceptâ diametro* D K, *viz.* N K q $=$ L R $\times$ D K. 94.

Ob $DC : CB : LR \div\!\div$ erit $CBq = DC \times LR$. Et (per *Coroll.* 4. prop. 20.)

$\left.\begin{matrix} CBq \\ DC \times LR \end{matrix}\right\} : NKq :: DC : DK :: DC \times LR : DK \times LR.$

Unde $NKq = DK \times LR$; & sic ubique.

Def. Recta LR (sicut in Hyperbolâ & Ellipsi) dicitur *Latus rectum* seu *Parameter.*

Schol. Ex eo quod quadratum ordinatæ *Comparatum* sive *applicatum* rectangulo ex abscissâ & parametro, eidem æquale sit, Hæc sectio *Apollonio* PARABOLA dicta est.

Prop. XXVI. Theor. XXV.

95. 96. *In Parabola, si binæ qualibet diametri* C D, G E (*quarum vertices* C, G) *si opus productæ, rectæ cuivis* I H *utrinque ad Sectionem in* I, H *terminatæ, & si opus productæ, occurrant in binis punctis* D, E, *vel binis quibusvis rectis inter se parallelis* I H, O P, *ad sectionem ut prius terminatis occurrant in* D, Q, E, R; *Si recta sit unica, Erit,*

$ID \times DH : HE \times EI :: CD : GE$. *Sin binæ sint rectæ,* $ID \times DH : OR \times RP :: CD : GR$; *& sic de cæteris punctis.*

96. *Idem erit de quadratis contingentium, si coeuntibus ex. gr. punctis* H, I *recta unica, vel binarum rectarum alterutra fiat contingens, viz.* $HDq : IEq :: CD : GE$ &

$HDq : OR \times RP :: CD : GR$ *& sic de cæteris punctis.*

Bisectis I H, O P in S, T, Connexa S T occurrat sectioni in A, erit hæc rectarum I H, O P diameter; ductâque L A K his parallelâ occurrente diametris in L, K, eadem sectionem in A continget; à punctis C, G intelligantur ordinatæ ad diametrum A S T rectæ C M, G N; quæ erunt propterea rectis L A K, I H, O P parallelæ; Erit per prop 18.

1 $ID \times DH : \left\{\begin{matrix} LAq \\ CMq \end{matrix}\right\} :: CD : CL$ & per *Corol.* 4. prop. 20.

2. NGq:

2. $NGq : CMq :: \left\{\begin{matrix} NA \\ GK \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} MA \\ CL \end{matrix}\right\}$ ergo ex æquo

$ID \times DH : NGq :: CD : GK$; & per prop. 18.

3. $HE \times EI : \left\{\begin{matrix} AKq \\ NGq \end{matrix}\right\} :: GE : GK$; ergo ex æquo

4. $ID \times DH : HE \times EI :: CD : GE$.

Rursus, per prop. 18.

5. $OR \times RP : HE \times EI : GR : GE$; ergo per proport. 4. & 5. ex æquo

$ID \times DH : OR \times RP :: CD : GR$. & sic de cæteris punctis.

Si recta DIHE sit contingens, coeuntibus punctis H, I fit $ID \times DH = DHq$ & $EI \times EH = IEq$ &c.

Coroll. Si VX sit parameter diametri AST, erit $GE \times VX = IE \times EH$, & sic de punctis D, Q, R. Nam (per hanc prop. 26.) $IS \times SH = SHq : IE \times EH :: AS : GE :: VX \times AS : VX \times GE$; Sed $VX \times AS$ (per prop. præced) $= SHq$; Ergo & $VX \times GE = IE \times EH$ *i. e.* $VX : IE :: EH : GE$. Hoc est, ut parameter diametri cujusvis in Parabolâ, ad summam duarum quarumlibet ordinatarum ad eandem diametrum; sic earum differentia, ad differentiam absciſſarum. Nam VX est Parameter, IE (ob $IS = SH$ & $SE = NG$) est summa ordinatarum SH, NG; EH est earum differentia, Et $EG = NS$ est absciſſarum AS, AN differentia. 95. 96. 95.

Prop. XXVII. Theor. XXVI.

Si duæ rectæ LA, AE, *quamlibet è sectionibus conicis, vel sectiones oppositas in* L, E *contingentes, vel quarum una* AL *in hyperbola, vel sectionibus opp. sit forte asymptotos, concurrant in* A, *Recta vero quævis* ND *earum alteri* EA *parallela (si opus producta) alteri* LA *(si opus productæ) occurrat in* B, *& sectioni, vel utrivis sectionum oppositarum in* N, D, *& tactus conjungenti* LE *vel (si* LA *sit asymptotos) rectæ per tactum* E *asymptoto* LA *parallelæ, in* R; *Dico* $BRq = BD \times BN$. 97. 98. 99. 1. 2. 3.

97. 98. *Idem erit de quadrato ex* BD *vel* BN, *si coeuntibus*
99. 1. *punctis* N, D, *recta* $RBDN$ *ellipsin, vel unam è sectionibus oppositis contingat.*

97. 98. Nam (per prop. 17. vel 18.) $BD \times BN : BLq ::$
99. 1. 2. $AEq : ALq ::$ (ob sim. triang.) $BRq : BLq$. Ergo
3. $BD \times BN = BRq$.

3. Si (tactu L in infinitum abeunte) recta AL fiat asymptotos, erit (ob punctum L infinite distans) EL parallela AL unde $BRq = AEq =$ (per *Coroll.* prop. 15.) $BD \times BN$.

97. 98. 2. Coeuntibus punctis D, N, fit $BD \times BN = BNq$
99. 1. vel $BDq =$ (prius) BRq.

Coroll. Si $RBDN$ sit contingens, ob $BRq = BNq$, Erit $BR = BN$ vel BD.

Prop. XXVIII. Theor. XXVII.

4. 5. *In Hyperbola vel Sectionibus oppositis, si à binis punctis* A, D *agantur duæ rectæ* AG, DF *inter se parallelæ, utrivis asymptoto (si opus productæ) in* G, F, *occurrentes, & ab iisdem punctis totidem aliæ* AH, DI, *inter se quoque parallelæ, alteri asymptoto (si opus productæ) occurrentes in* H, I; *Dico* $AG \times AH = DF \times DI$.

Connexa AD, (& si opus producta) secet asymptotos in B, E; Erit ob $AB = DE$, & $BD = EA$, & ob sim. triangula

$$\left.\begin{matrix}AB\\ED\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}BD\\EA\end{matrix}\right\} :: AG : DF \ \&$$
$$ED : EA :: DI : AH \ \text{Ergo}$$
$$AG : DF :: DI : AH$$
i, e. $AG \times AH = DF \times DI$.

6. *Coroll.* 1. Hinc si AG, DF sint asymptoto CH, & AH, DI asymptoto CG parallelæ, erunt constituta parallelogramma $CGAH$, $CFDI$ æqualia. Nam parallelogramma æquiangula proportionalia sunt rectangulis è lateribus, quæ (prius) æqualia sunt.

Coroll.

Coroll. 2. Unde Rectæ B A E, K D L hyperbolam vel sectiones oppositas utcunque contingentes, ab angulo asymptotôn abscindunt triangula L C K, B C E æqualia. Nam æqualia parallelogramma I D F C, G A H C (ob K L, B E, in D & A bisectas) sunt eorum dimidia 7.

Coroll. 3. Ob æqualia triangula E C B, L K C, & angulum ad C communem, vel æqualem; Erit 7.

1. L C : C E : : C B : C K. Et componendo vel dividendo.

$$2.\ \left\{\begin{matrix} LC \pm CE \\ LE \end{matrix}\right\} CE :: \left\{\begin{matrix} CB \pm CK \\ BK \end{matrix}\right\} : CK$$

Coroll. 4. Si contingentes (si opus productæ) concurrant in O; addito vel dempto communi spatio C E O K, æqualia etiam erunt triangula O K B, O L E, & angulus ad O communis vel æqualis; Ideoque 7.

1. B O : O E : : L O : O K; unde comp. vel div.

$$2.\ \left\{\begin{matrix} BO \pm OE \\ BE \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} OE \\ vel \\ BO \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} LO \pm OK \\ LK \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} OK \\ vel \\ LO \end{matrix}\right\}$$

Et dimidiatis antecedentibus, erit

3. B A : O E vel B O : : L D : O K vel L O.

Et dividendo

$$4.\ BA \left\{\begin{matrix} BO - BA \\ OA \end{matrix}\right\} :: LD : \left\{\begin{matrix} LO - LD \\ DO \end{matrix}\right\} \text{\&c.}$$

Prop. XXIX. Theor. XXVIII.

Si recta L T *Hyperbolam in* T *contingens utrivis asymptoto occurrat in* L, *ab* L *vero ducatur recta* L O P, *quæ sectioni, vel sectionibus oppositis, occurrat in duobus punctis* O, P, *Et à punctis* O, T, P, *ducantur rectæ* O Q, T V, P R *asymptoto* C L *in qua est punctum* L *parallelæ, alteri asymptoto* C M (*si opus productæ*) *occurrentes in* Q, V, R; *Si puncta* O, P *sint ad eandem sectionem, Rectarum* O Q, P R *summa, Sin ad oppositas, earundem differentia, æqualis erit duplæ* T V. 8. 9.

Productæ

Productæ si opus L T, L O P occurrant asymptoto V R in A, M, & ab utrovis O, P, (ex. gr. O) ducatur O B parallela V C, occurrens L C in B.

Ob triangula M P R, O L B similia, & $MP = OL$, erit $PR = LB$. Estque $BC = OQ$, unde $CL = OQ \pm PR =$ (ob $AT = TL$) $2TV$.

Coroll. 1. Hinc si per idem punctum L ducantur quotlibet L O P, erit duarum quarumvis O Q, P R ab ejusdem rectæ L O P punctis ductarum summa, vel differentia, duarum O Q, P R ab alterius cujusvis rectæ L O P punctis ductarum summæ vel differentiæ æqualis. Nempe ubique æqualis duplæ T V.

10. *Coroll.* 2. Si Recta per L sit alteri asymptôton parallela, in unico puncto O sectioni occurret; Eritque, in hoc casu, sola $OQ = 2TV$. Nam $OQ = CL = 2TV$. Unde in Corollario præcedenti eadem est ratio solius hujusmodi O Q, quæ duarum aliarum O Q, P R summæ, vel differentiæ.

Prop. XXX. Probl. II.

11. 12.
13. 14. *Datæ rectæ lineæ,* D E, *ad sectionem quamvis conicam, vel ad sectiones oppositas utrinque in* D, E *terminatæ, diametrum invenire; Et centrum in Hyperbola vel opp. sect. & Ellipsi.*

Ducatur quælibet H I ipsi D E parallela, sectioni, vel sectioni oppositæ, vel sectionibus oppositis utrinque in H, I, occurrens. Bisecentur D E, H I in F, G; Erit connexa F G rectæ D E diameter, per *Coroll.* 10. prop. 20.

11. 12. Inventâ hoc modo quâlibet diametro ellipseos, vel determinatâ hyperbolæ, hæc producta occurrat sectioni vel sectionibus oppositis in A, B. Bisecetur A B in C; Erit C centrum per prop. 22. Vel inventis hoc modo duabus quibusvis diametris, Hæ (per eandem prop. 22.) in Centro se intersecant. Posteriori methodo, datâ utriusvis è sectionibus oppositis, vel Ellipseos aliquâ tantum portione, centrum invenitur.

Prop.

Prop. XXXI. Probl. III.

In omni sectione conicâ, & inter sectiones oppositas, A 15, 16.
dato sectionis puncto D, *ad datam diametrum* A B, 17. 18.
ducere ordinatam D O; *Et diametrum huic conjugatam in Hyperbolâ vel sect. opp. & Ellipsi.*

In Hyperbolâ, inter Sectiones oppositas, & in El- 15. 16.
lipsi, Invento centro C, connexa D C & producta oc- 17.
curret sectioni, vel sectioni oppositæ in E; Per E ducta E F parallela A B occurret sectioni, vel sectioni oppositæ in F, vel fortè sectionem, vel sectionem oppositam in E continget tantùm. Si occurrat in F, connexa D F occurret diametro A B in O; Eritque D O ordinata quæsita. Nam D C = C E unde ob parallelas rectas erit D O = O F. Liquet ergo propositum per *Coroll.* 2. prop. 22.

Si recta per E diametro A B parallela sit contingens, *Supple figuras hujus casus.*
erit ipsa D E ordinata quæsita. Nam (per *Coroll.* 1. prop. 22.) erit in hoc casu recta E F parallela ordinatis ad diametrum D C E, unde (per prop. 23. & def. seq.) E C D, B C A sunt diametri conjugatæ, ideoque (per ejusdem prop. 22. *Coroll.* 2.) ad se mutuo ordinatæ. Inventâ vero quâlibet ordinatâ, recta per centrum huic parallela erit diameter huic conjugata.

In Parabolâ, Ductâ utcunque D A diametrum A B 18.
in A secante; in D A productâ, fiat A E = D A; Ducta vero E F ipsi A B parallela occurret sectioni in F, junctaque F D occurret A B in O, Eritque D O ordinata quæsita. Nam ob rectas parallelas, & ob D A = A E, erit D O = O F; unde liquet propositum per *Coroll.* 13. prop. 20.

Prop. XXXII. Probl. IV.

In omni sectione conicâ rectam D T *ducere, quæ se-* 19. 20.
ctionem in dato puncto D *contingat.* 21.

In

19. 20. In Hyperbola & Ellipsi, Invento centro C, ductâque diametro DC, fiat ad hanc ordinata quælibet AO; deinde per D ductâ rectâ DT parallelâ AO, Proposito satisfit. Patet per *Coroll.* 8. prop. 20.

21. In Parabola, Inventâ quâlibet diametro BC, per D agatur DE ipsi BC parallela, quæ propterea erit diameter; Ad hanc fiat quælibet ordinata AO, & per D ducatur DT ipsi AO parallela; Hæc (per idem *Coroll.* 8.) sectionem in D continget.

Prop. XXXIII. Probl. V.

22. *Datæ Hyperbolæ vel Sectionum oppositarum asymptotos invenire.*

Inventâ quâlibet diametro determinatâ CB, & centro C, ducatur utcunque FG parallela CB, unam sectionum in G secans atque huic oppositam in F [vel si non detur sectio opposita, ductâ diametro CM ipsi CB conjugatâ, secante GF in M, fiat MF = MG] Diametroque FG describatur semicirculus FPQG; Erectâque ubicunque ad FG perpendiculari NO, æquali semidiametro CB, per O agatur POQ ipsi FG parallela, secans circuli peripheriam in P, Q punctis; Ab his, dimissis ad diametrum FG perpendicularibus QR, PS, Erunt junctæ CR, CS asymptoti.

Nam CBq = (ex construct.) NOq = (ob parall.) QRq = (propter circ.) GR×RF; Unde (per *Coroll.* 4. prop. 16.) erit punctum R ad alteram asymptoton. Parique ratione erit punctum S ad alteram.

Prop. XXXIV. Probl. VI.

23. 24. *In omni sectione conicâ, Datæ diametri* AB *Parametrum invenire.*

In Hyperbolâ, recta EBD in vertice B contingens & ad asymptotos in E, D terminata, æqualis est (per def.) secundæ

ſecundæ diametro ipſi A B conjugatæ. In Ellipſi diameter E D diametro A B conjugata, & ad ſectionem in E, D terminata, eſt ſecunda diameter. Inventâ ergo in Hyperbola & Ellipſi hujuſmodi rectâ E D, fiat ipſis A B : E D tertia proportionalis L R; Hæc (per def.) erit ipſius A B parameter.

In Parabolâ, Ordinatâ ad diametrum A B quâvis 25.
rectâ G I, Ipſis A I, I G, fiat tertia proportionalis L R; Erit L R (per def.) diametri A B parameter.

Def. Duæ ſectiones Conicæ ſe mutuò *tangere* di- 26.
cuntur, Si in communi puncto B eadem recta A B utramque ſectionem contingat.

Prop. XXXV. Theor. XXIX.

In ſectionis cujuſvis conicæ vel ſectionum oppoſitarum, 27. 28.
quatuor quibuſvis punctis A, B, C, D, *concurrant qua-* 29.
tuor rectæ infinitæ A B, A C, B D, C D, *ſcilicet in unoquoque duæ; Per quintum verò quodvis ſectionis vel utriuſvis ſect. opp. punctum* E *tranſeant duæ rectæ infinitæ* E N, E H, *priorum duobus quibuſvis* A B, A C *in aliquo quatuor punctorum* A *concurrentibus reſpectivè parallelæ, quarum* E N *occurrat* A C *in* Q, D B *in* N; E H *vero occurrat* A B *in* R, C D *in* H.

His poſitis; Si, manentibus punctis A, B, C, D, *punctum* E, *cum rectis* E N, E H *priorem parallelismum ſervantibus, per totam ſectionem vel ſect. opp. ſucceſſivè transferri intelligatur, Erunt in omni ejuſdem puncti* E *ſitu rectangula* E R x E H, E N x E Q *ad invicem in eadem ratione.*

Manentibus vero punctis A, B, C, *&* E, *punctoque* D (*hoc eſt rectarum* B D, C D *interſectione*) *per totam ſectionem vel ſect. opp. tranſlato, Erunt in omni ejus ſitu partes* E H, E N *ad invicem in eadem ratione.*

Per D & utrumvis C, B, *ex. gr.* B, agantur rectæ F D G, B *n d* ipſi A C parallelæ, quarum B *d* occurrat

F denuò

denuò sectioni, vel sect. opp. in d, rectæ vero EN in n, & FDG occurrat sectioni, vel sect. opp. in F, & rectæ AB in G; connexaque Cd occurrat DG in S, EH in b.

Porrò recta HER occurrat denuo sectioni, vel sect. opp. in T; ductâque rectarum AC, Bd diametro MK, (bissecante scilicet AC, Bd, in M, K,) bisecabit hæc tam DF, TE, ad sectionem, vel sect. opp. quàm SG, bR ad rectas AB, Cd terminatas; unde SD = FG, & bT = ER; Idemque consequetur, si forte rectarum DG, EH una vel utraque sit contingens.

Ob sim. triang. & rectas parallelas, erit

$$Hb : SD :: bC : SC :: AR : AG, \text{ unde}$$

$$Hb : \left\{\begin{matrix} AR \\ EQ \end{matrix}\right\} :: SD : AG. \text{ Rursus}$$

$$\left.\begin{matrix} Bn \\ ER \end{matrix}\right\} : Nn :: DG : GB. \text{ Ergò ductis \&c.}$$

$$ER \times Hb : Nn \times EQ :: \left\{\begin{matrix} DG \times SD \\ DG \times FG \end{matrix}\right\} : GB \times AG :: (\text{per}$$

$$\text{prop. 17. \& 18.}) \left\{\begin{matrix} ER \times RT \\ ER \times Eb \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} RA \times RB \\ EQ \times En \end{matrix}\right\} \text{ Et comp. vel}$$

div. pro vario situ punctorum H, b; N, n, erit

$$\left.\begin{matrix} ER \times Hb \pm ER \times Eb \\ ER \times Eb \pm ER \times Hb \\ ER \times EH \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} Nn \times EQ \pm En \times EQ \\ En \times EQ \pm Nn \times EQ \\ EQ \times EN \end{matrix}\right\} :: ER \times Eb$$

$$: EQ \times En :: (\text{prius}) \; DG \times FG : GB \times AG.$$

At manentibus punctis A, B, C, D, ratio DG × FG, : GB × AG (puncto E utcunque situm mutante) manet eadem, ergo & ratio ER × EH : EQ × EN.

2. Ob ER × EH : EQ × EN :: ER × Eb : EQ × En, erit EH : EN :: Eb : En; Manentibus vero punctis A, B, C, & E, (puncti D situ utcunque mutato) manet semper ratio Eb : En, proindéque & EH : EN eadem.

30. Si punctum A puncto B vel C coincidat, hoc est, si utravis AC vel AB, *ex. gr.* AB, sit contingens, incidet punctum d in C, & dC, hoc est Sdb evadet contingens, rectæque dB vel AC diameter per contingentium Sdb, GAR occursum transibit, vel erit iis parallela,

rallela, & bisecabit S G, b R; D F, T E, ut priùs; Eritque demonstratio omnino eadem.

Si punctum D puncto C vel B coincidat, hoc est, si D H *ex. gr.* sit contingens, Quod in alio quovis situ puncti D, ex utràque puncti C vel B parte, obtinere ostendimus, in hoc intermedio obtinebit. *Supple fig. hujus casus.*

Si A, C & B, D, vel A, B & C, D simul coincidant, hoc est, si utraque A B, C D *ex. gr.* sit contingens, in tactus conjungentem coalescent A C, B D, B d; & coincidentibus punctis Q, N, n, & H, b, fit E Q = E N = E n, & E H = E b; Hoc est, manente utroque contactu, erit ratio E R x E H : E N q in quovis situ puncti E eadem, Et ratio E H, E N, (manente E) eadem quæ in alio quovis situ puncti D viz. E b : E n. 31. *Supple reliquos casus.*

Si punctum D infinitè distet, hoc est, si B D, C D sint utrivis asymptoto hyperbolæ [vel sect. opp.] parallelæ, vel Parabolæ diametri, utraque pars propositionis etiamnum valebit; Et si punctum A infinitè distet, hoc est, si B A, C A, adeoque E N, E H sint hyperbolæ asymptoto parallelæ, vel parabolæ diametri, abibunt puncta Q, R in infinitum, & coalescent rectæ E N, E H; Erit vero ratio E H : E N in quovis situ puncti D eadem. Nam quod in quibusvis ex utràque parte, adeoque in infinite vicinis rectarum B D, C D vel B A, C A, positionibus obtinere ostendimus, in hisce intermediis (nec diversis) obtinebit. 32. 33.

Coroll. 1. Positis ut priùs, Si, connexà B C secante E H in b, fiat E H : E b : : E N : E n, (puncto n sumpto ad easdem partes puncti E respectu puncti N, ad quas jacet b respectu H,) & connectatur B n, eadem sectionem in B continget. Nam accedente puncto D ad B, recta D B evadet contingens, accedetque simul punctum H ad b, adeoque (ob rationem E H : E N constantem) N ad n; hoc est, erit B n contingens. 34. *pro omnibus casibus.*

Coroll. 2. Positis quæ priùs, si in rectis E N, E H sumantur puncta n, b ad easdem puncti E partes ad quas jacent N, H respectivè, ita ut sit E N : E H : : E n : E b, Connexæ B n, C b sese mutuò in ipsa sectione intersecabunt, 35. *pro omnibus casibus.*

F 2

tersecabunt, aut saltem erunt alterutri asymptotôn hyperbolæ, aut parabolæ diametris parallelæ. Sit earum occursus (si modò aliquis) △, sitque alterutrius *ex.gr.* C *b* cum sectione occursus (si modò occurrat) δ, & connectatur δ B; Hæc (propter rationem E H : E N constantem) non alibi quàm in *n* secabit E N, ideoque non erunt puncta △, δ ab invicem diversa. Sin C *b* sectioni vel sect. opp. non ampliùs occurrat, hoc est, si sit hyperbolæ asymptoto vel parabolæ diametris parallela, huic parallela ex B (per hanc prop.) non alibi quàm in *n* secabit E N, hoc est erit B *n* pariter asymptoto hyperb. vel parab. diametris parallela.

36. *Suppl. reliquos casus.* *Coroll.* 3. Sint puncta quinque B, C, D, △, E ad sectionem conicam vel ad sectiones oppositas; Si per E *ex.gr.* transeat recta E N *n*, occurrens connexis B D, B △ in N, *n*; & alia E H *b* occurrens connexis C D, C △ in H, *b* respectivè, ita ut sit E H : E N : : E *b* : E *n*; agantur verò C A, B A ipsis E H, E N respectivè parallelæ; Hæ aut sibi mutuò occurrent in ipsa sectione [vel unâ sect. opp.] vel saltem (in unam coalescentibus rectis E N, E H) erunt uni asymptotôn hyperbolæ vel parabolæ diametris parallelæ. Sit earum occursus, (si modò aliquis) A, occurrat vero B A sectioni, vel sect. opp. denuò (si modò occurrat) in *a*, connexâque C *a*, ducatur E L parallela C *a*, occurrens C D, C △ in L, *l* respectivè; Eritque (ex hâc prop.) E N : E *n* : : E L : E *l* : : (ex hyp.) E H : E *b*, quod fieri non potest (propter C D, C △ non parallelas) nisi rectæ E H, E L, hoc est, puncta H, L; *b*, *l*, coincidant; adeoque ipsis E H, E L parallelæ rectæ C A, C *a*, hoc est, puncta A, *a*.

37. *Suppl. reliquos casus.* Si B A sit asymptoto, vel parabolæ diametris parallela, ut non ampliùs occurrat sectioni, ductis C *a*, E L eidem parallelis, ostendetur eodem modo E H, E L sibi invicem, & rectæ E N, coincidere, adeoque & C A, C *a*, hoc est B A, C *a* esse asymptoto, vel parab. diam. parallelas.

Supple hos casus. Si ex D, △ unum vel utrumque infinitè distet, vel

coincidentibus

coincidentibus C, D, vel C, △, B, D vel B, △, ex rectis connectentibus una vel duæ sint contingentes, Eadem prorsus est demonstratio.

Coroll. 4. Positis quæ in *Coroll.* 3. Cùm punctum A (modo infinitè non distet) sit semper ad sectionem, Incidente A in B, manifestum est fore A B contingentem. Idem intellige de A C, incidente A in C. *Supple hunc casum.*

Coroll. 5. Sectio conica [vel sect. opp.] sectioni conicæ [vel sect. opp.] non occurrit ad plura puncta quàm quatuor, nisi in totum congruat; Quoties autem unius hyperbolæ [vel sect. opp.] asymptotos fuerit alterius asymptoto, vel parabolæ diametris parallela, aut duarum parabolarum communes fuerint diametri, id pro communi (infinitè scilicet distante) puncto censebitur, sectionum vero quilibet contactus pro duobus punctis. Nam si dixeris esse quinque communia puncta A, B, C, D, E; Connexis A B, A C; B D, C D, ductisque E N, E H (ut priùs,) sumptoque in utrâvis sectione puncto quovis △, & connexâ B △ secante E N in *n*, & C △ secante E H in *b*, erit (ex hâc prop.) E N : E H : : E *n* : E *b*; unde (per *coroll.* 2.) punctum △ erit pariter ad alteram sectionem. Et sic ubique. 35. *pro omnibus casibus.*

Eadem est demonstratio in cæteris casibus, si pro infinitè distante puncto ducantur B A, C A, vel B D, C D asymptotis, vel parabolarum diametris, vel utrisque (prout casus fuerit) parallelæ; pro contactu vero concipias duorum occursuum puncta A & B, sive A & C, vel B & D, sive C & D, in unum coire in B vel C, & à communi rectâ contingente connecti, cæteraque (juxta præcedentia) fieri perinde ac si quinque essent diversa puncta. *Supple hos casus.*

Quamvis hæc demonstratio manifeste requirat, ut punctum E (ratione muneris sui) nec alii cuivis puncto coincidat, nec infinitè distet, ut non directè extendatur ad casum ubi fortè dixeris Duos esse contactus, & unum præterea occursum sed infinite distantem; Nihilominùs in hoc etiam casu valet corollarium. Nam

quod

quod de duobus contactibus & occursu quantumvis longinquo ostensum est, in hujusmodi occursu infinite distante pariter obtinebit.

Coroll. 6. De duarum sectionum contactibus in corollario præcedenti ostensa de duabus hyperbolis [vel sect. oppositis] unam vel utramque asymptoton communem habentibus, pariter intelligenda sunt. Nam quemadmodum recta conjungens duo puncta (eorum uno in infinitum abeunte) evadit parabolæ diameter, vel hyperbolæ asymptoto parallela; proindeque hujusmodi rectarum parallelismus simplici occursui æquipollet, ut ex supradictis manifestum est; ita recta utramque sectionem contingens, hujusmodi tactu in infinitum abeunte, fit communis asymptotos; Et quæ de contactu quantumvis longinquo vera sunt, de communi asymptoto pariter vera erunt.

38. *Coroll.* 7. Etiam si duæ Parabolæ habeant communes diametros, & duo præterea communia puncta A, B, ad aliud punctum sibi mutuò non occurrent, nisi in totum congruant. Idem intellige de uno puncto qui sit contactus. Nam si dicas aliud esse commune punctum C, connexâ A B, ductâque huic parallelâ C E *e* secante unam sectionem in E, alteram in *e*, Si bisectâ A B in H, ducatur H I communibus diametris parallela, Erit hæc (per *coroll.* 16. prop. 20.) utriusque sectionis diameter, & bisecabit tam C E, quam C *e* in I; unde coincident E, *e*; Eruntque adeò præter communes diametros quatuor communia puncta. Simili modo (si concipias A, B concidere, & à communi rectâ contingente A B connecti, & diametrum H I per contactum duci) ostendetur in secundo casu, præter communes diametros, tria esse communia puncta quorum unum est contactus.

Si in priore casu diameter rectæ A B transit per C, erit recta per C parallela A B communis contingens, eruntque in hoc casu, præter communes diametros, tria communia puncta quorum unum est contactus. Patet ergo ubique per *coroll.* 5.

Coroll.

Coroll. 8. Parabola parabolam, cui in totum non congruit, in duobus punctis non tangit. Nam recta connectens communium rectarum contingentium occursum, & medium tactus conjungentis punctum esset communis utriusque sectionis diameter: Unde patet per *coroll.* 7.

Prop. XXXVI. Theor. XXX.

Si per quatuor puncta sectionis conicæ [*vel sect. opp.*] A, B, C, D *ducantur quatuor rectæ* AB, AC, BD, DC, *eodem modo quo in propositione præcedenti, Et à quovis alio sectionis puncto* E *agantur quatuor rectæ* EL, EK, EO, EM *ad priores quatuor in* L, K, O, M, *respectivè terminatæ, & ad easdem quomodocunque inclinatæ; Item ab alio quovis sectionis puncto* e, *agantur quatuor aliæ* el, ek, eo, em, *ad easdem rectas cum prioribus respectivè terminatæ, prioribusque respectivè parallelæ; Erunt rectangula* EL × EM, el × em, *sub rectis scilicet ad duas* AB, CD *in uno aliquo quatuor punctorum non conccurrentes terminatis, ad invicem, ut rectangula* EK × EO, ek × eo *sub rectis ad reliquas duas* AC, BD *terminatis.* 39. *pro omnibus casibus.*

Per E, *e* actis EQN, *eqn*; ERH, *erh*, duabus AB, AC, in eodem puncto A concurrentibus, respectivè parallelis; quarum EQN, *eqn*, occurrant AC in Q, q; BD in N, *n*; ERH, *erh* occurrant AB in R, *r*; CD in H, *h*; Erit ob sim. triang.

ER : *er* :: EL : *el*, &

EH : *eh* :: EM : *em*, ductisque &c.

1. ER × EH : *er* × *eh* :: EL × EM : *el* × *em*.

Rursus, EQ : *eq* :: EK : *ek*, &

EN : *en* :: EO : *eo*, ductisque &c.

2. EQ × En : *eq* × *en* :: EK × EO : *ek* × *eo*.

Sed (per prop. præced.) est

ER × EH : *er* × *eh* :: EQ × EN : *eq* × *en*;

Ergo per proport. 1 & 2,

EL × EM : *el* × *em* :: EK × EO : *ek* × *eo*.

Si

Supple hos casus. Si rectarum quatuor puncta conjugentium una (coeuntibus duobus punctis) fit contingens, vel si duæ aliquæ sint contingentes, & duæ reliquæ in tactus conjungentem coalescant; vel è quatuor punctis unum infinitè distet; in iis nempe casibus in quibus obtinet propositionis præcedentis pars prior, unde hæc pendet, manet eadem demonstratio. Quæ etiam si rectarum E L, E K &c, *e l*, *e k* &c. aliquæ vel omnes in directum jacent, (punctorum coincidentium ratione habitâ) non proinde immutabitur.

Supple hos casus. Etiam, si in hyperbolâ [vel sect. opp.] ex quatuor punctis, uno secundum unius asymptoti directionem infinitè distante, aliud adhuc (quod priori non connexum intellige) secundum alterius asymptoti directionem infinitè distet; vel si connectens duo aliqua (coeuntibus punctis, & simul in infinitum abeuntibus) fiat asymptotos, duobus reliquis (sive coeant, sive non) finitè distantibus; Nihilominus in his, perinde ac in prioribus, casibus valebit propositio. Nam quod in horum punctorum situ quantumvis longinquo obtinet, in infinitè distante situ pariter obtinebit.

40. *pro omnibus casibus.* *Coroll.* Si quatuor rectarum duæ aliquæ in uno quatuor punctorum non concurrentes, *ex. gr.* C D, A B, concurrant in X, & reliquæ duæ C A, B D in Y, & rectæ omnes E L, E K, &c. *e l*, *e k*, &c. in directum jacentes fiant una recta E *e*, quæ etiam per X, Y transeat; erit E X : *e* X : : E Y : *e* Y. Nam in hoc casu coincidunt X, L, *l*, M, *m*; uti etiam Y, K, *k*, O, *o*; Unde

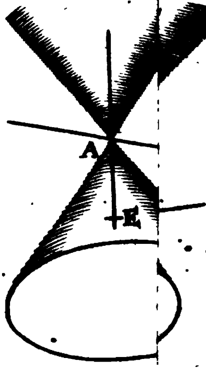
$$\left.\begin{array}{c} EL \times EM \\ EXq \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} el \times em \\ eXq \end{array}\right. :: \left\{\begin{array}{c} EK \times EO \\ EYq \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} ek \times eo \\ eYq; \end{array}\right.$$

ideoque : E X : *e* X : : E Y : *e* Y.

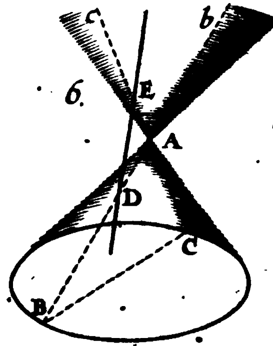
41. *pro omnibus casibus.* Idem erit, si, coeuntibus punctis *ex. gr.* A, B & C, D, rectæ A B, C D fiant contingentes, & reliquæ A C, B D in tactus conjungentem coalescant, rectaque E *e* per contingentium occursum X transiens secet tactus conjungentem in Y. Siquidem in hoc quoque casu coincidunt puncta X, L, *l*, M, *m*, & Y, K, *k*, O, *o*.

PARS

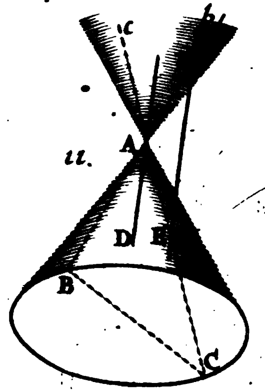
3.

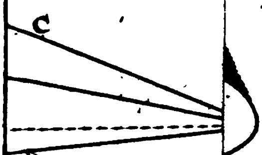


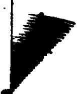
6.



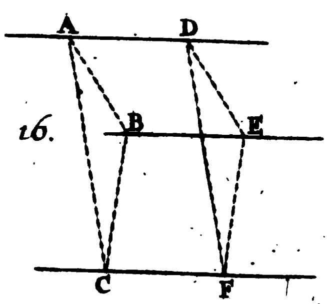
11.

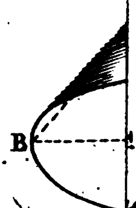






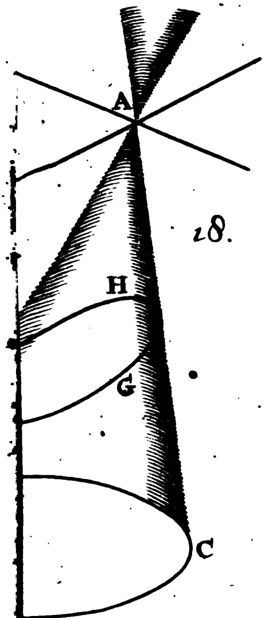
16.



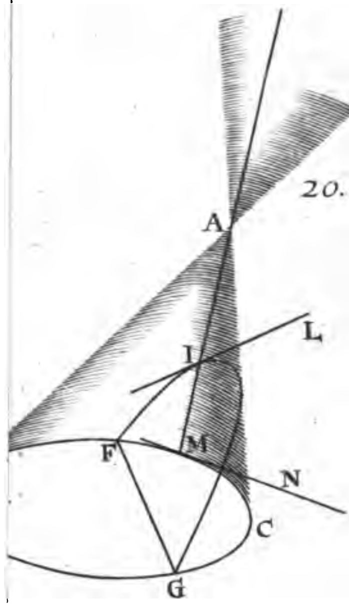


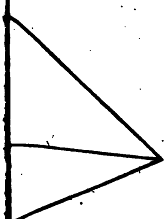
el Burghers sculpt. Univ. Oxon.

18.

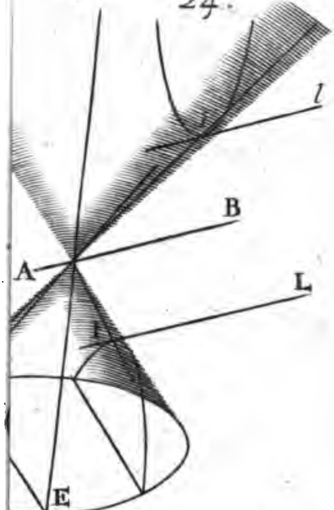


20.



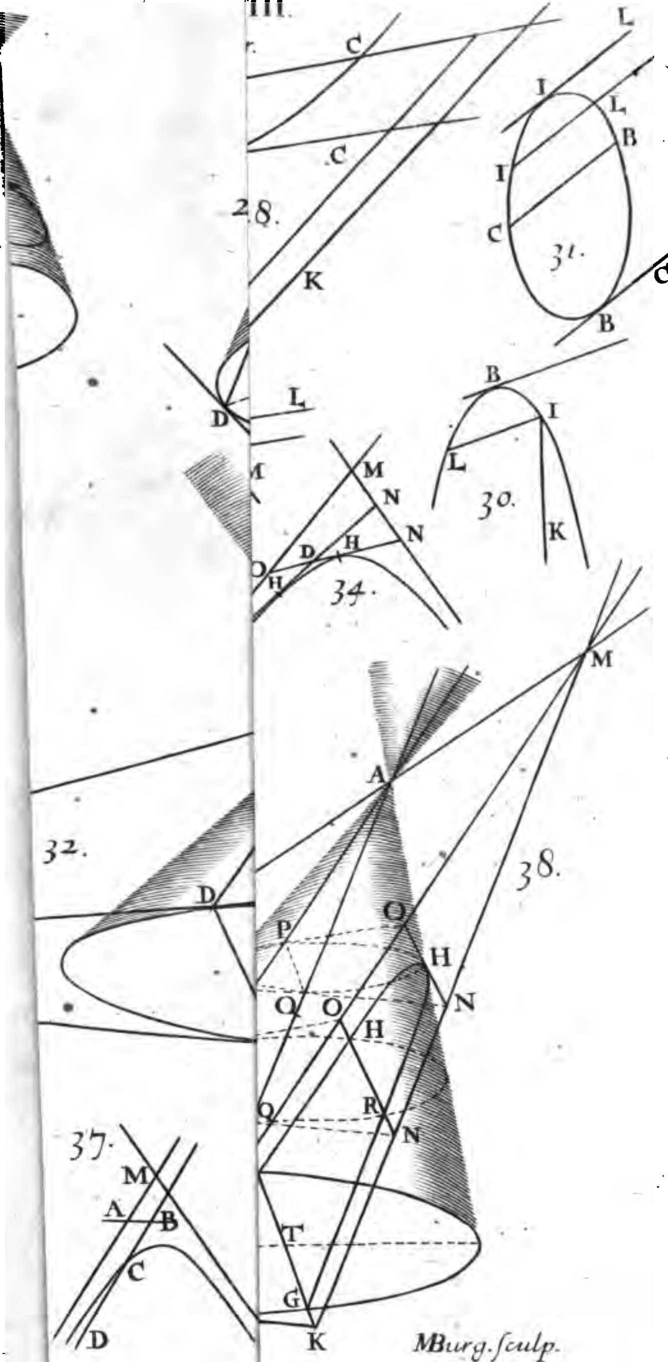


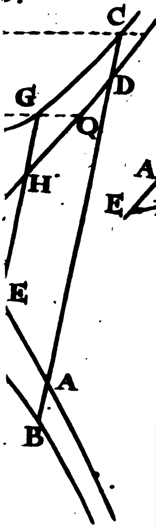
24.



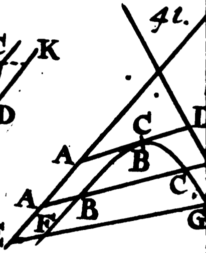
MBurg. sculp.

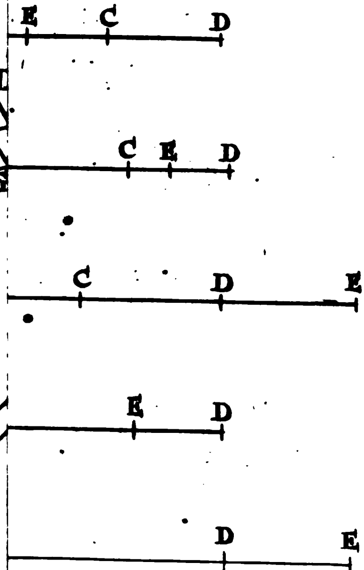
III.



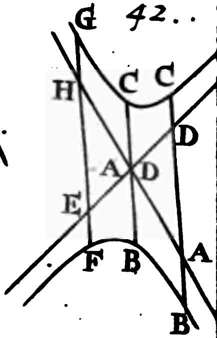

C
K
D
G
Q
H
E
A
B

41.

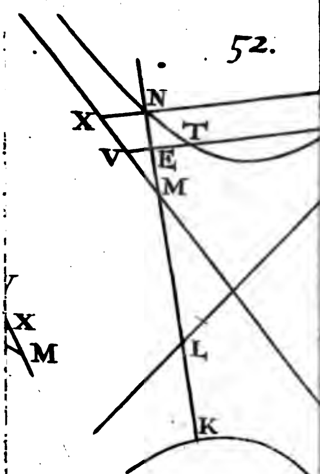

C
D
A
B
A
C
B
E
F
G


E C D
C E D
C D E
E D
D E

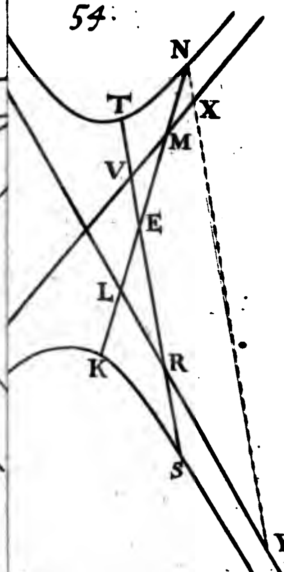
42.


G
H
C
C
D
A
D
E
F
B
A
B

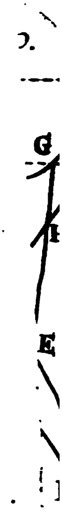
52.

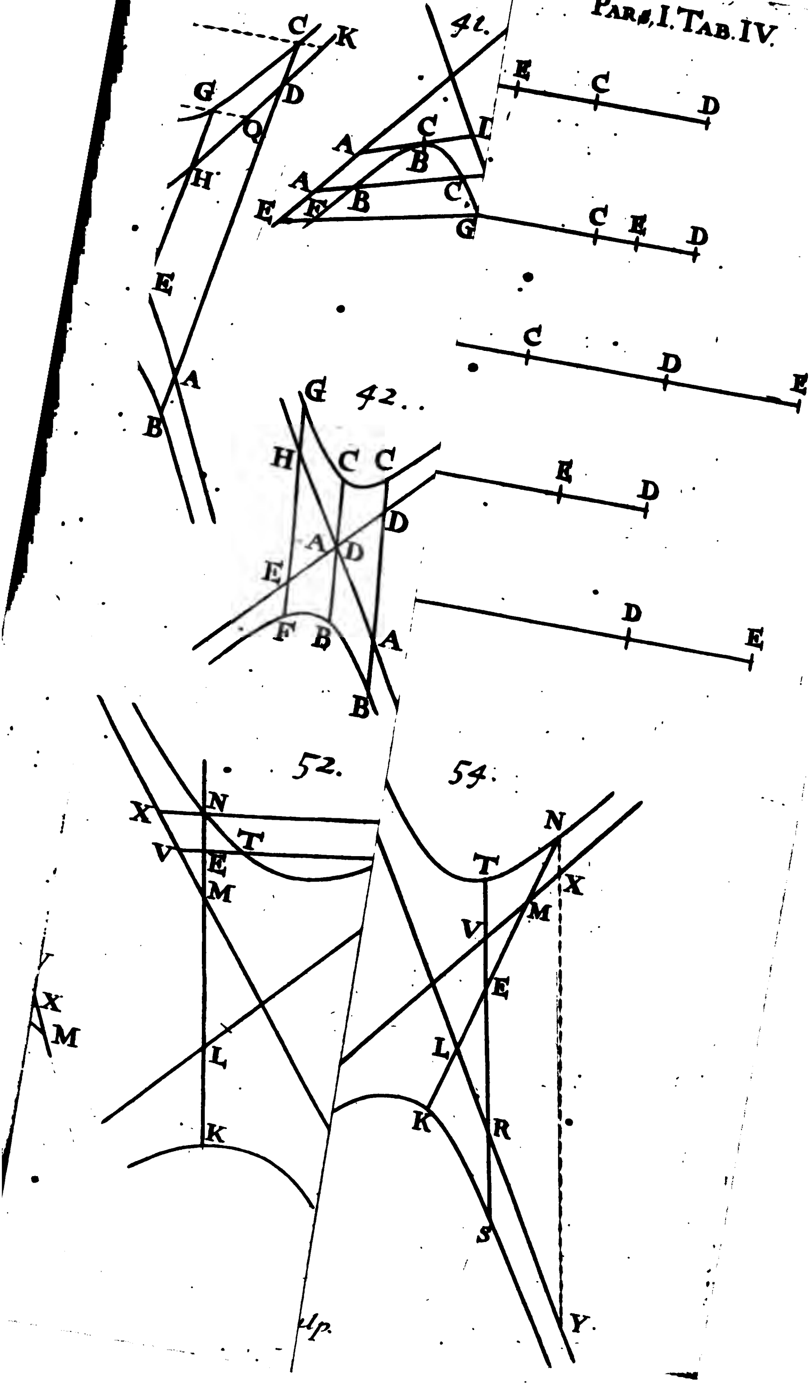

N
X
T
V
E
M
L
K
X
M

54.

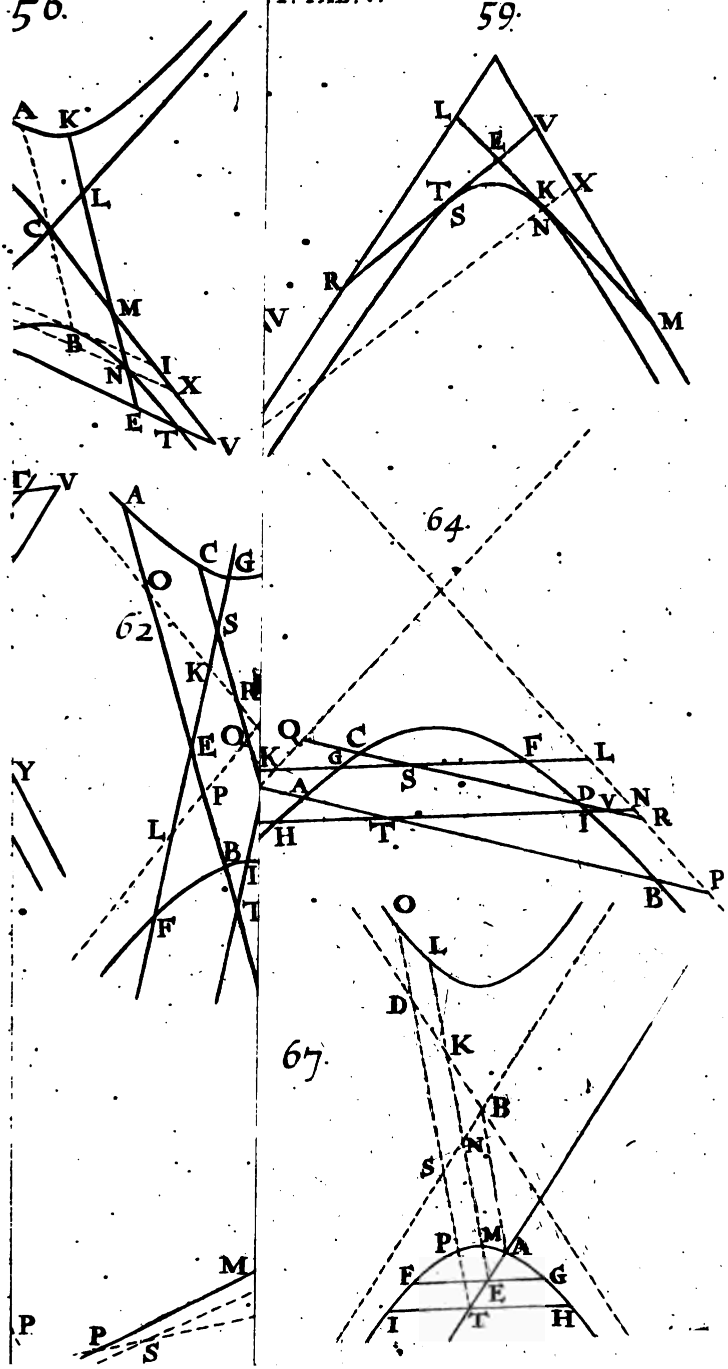

N
T
X
M
V
E
L
K
R
S
Y

lp.

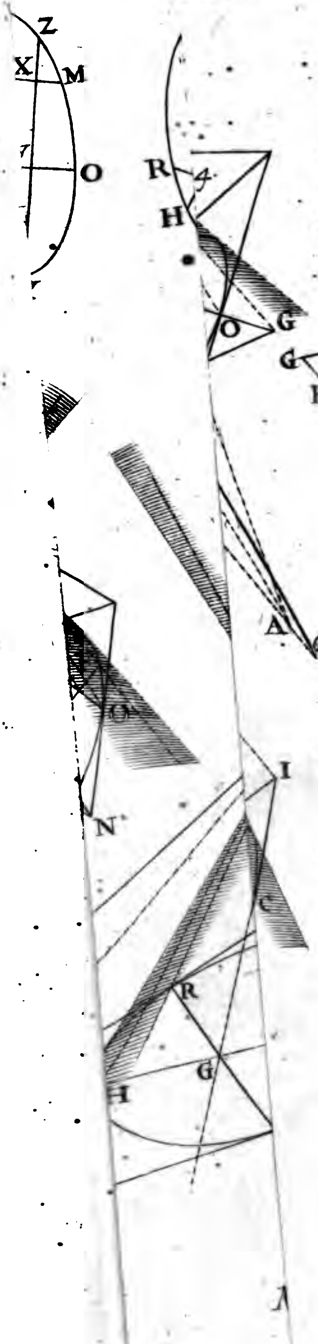

G
E

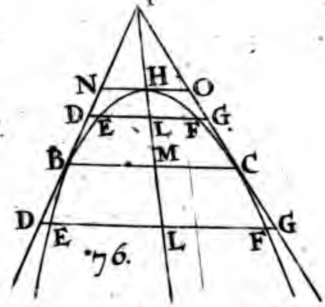

41.
42.
52.
54.

56. 59. 62 64. 67.

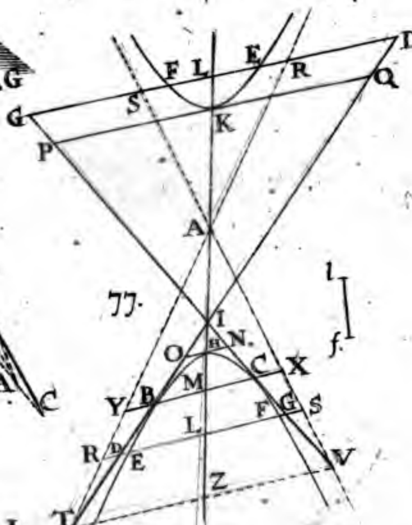

A K L C M B N I X E T V
L E V T K X S N R V M
A C G O S K R E O P L B I F T
Q C F L K G S A D V N H T I R B P
O L D K B N S P M A F G E I T H
Y P P M S

I. TAB. VI.

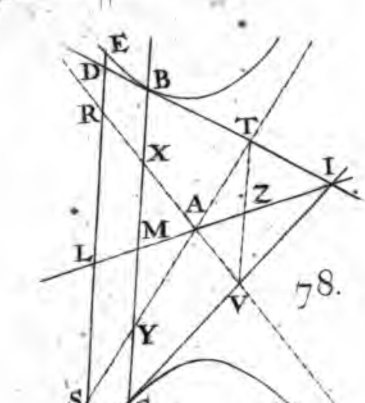




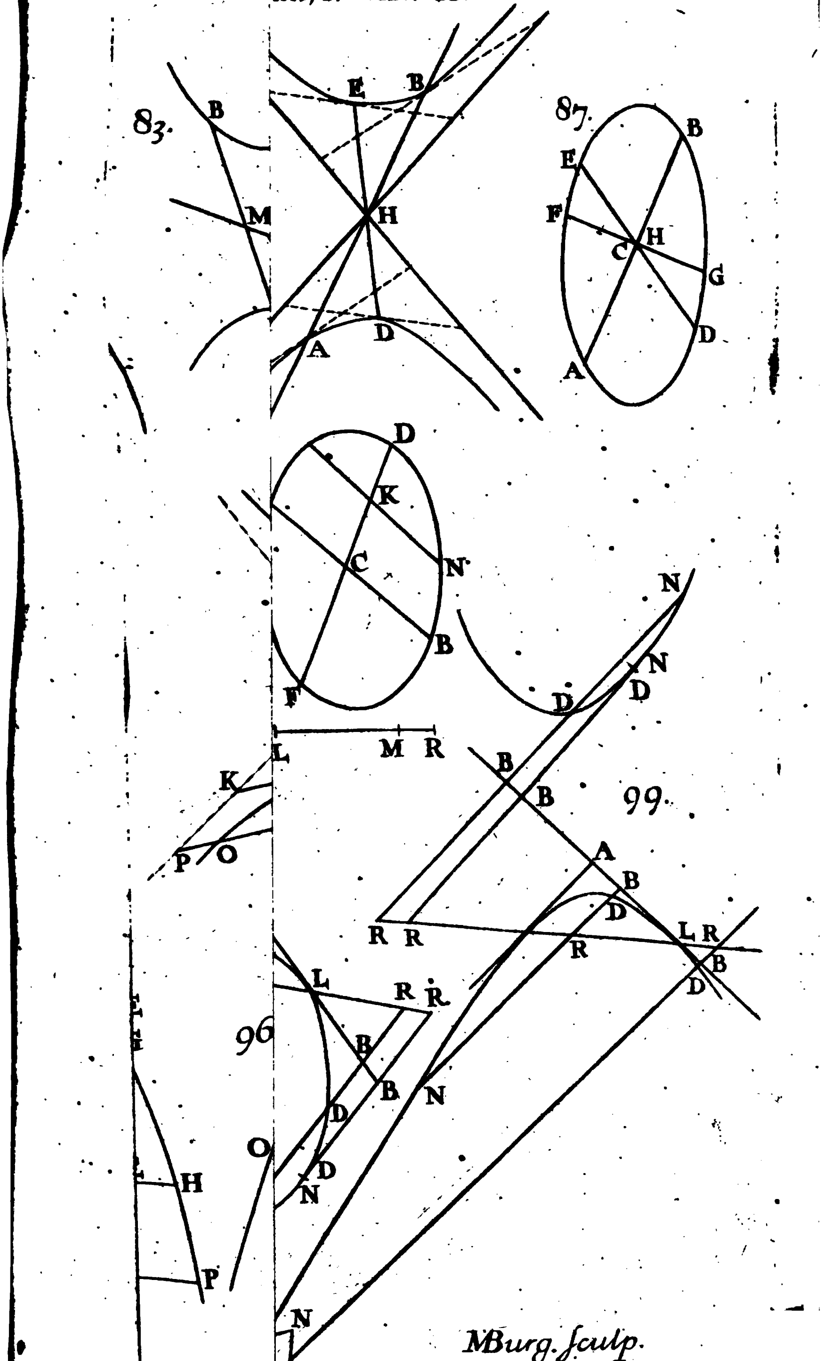
76.



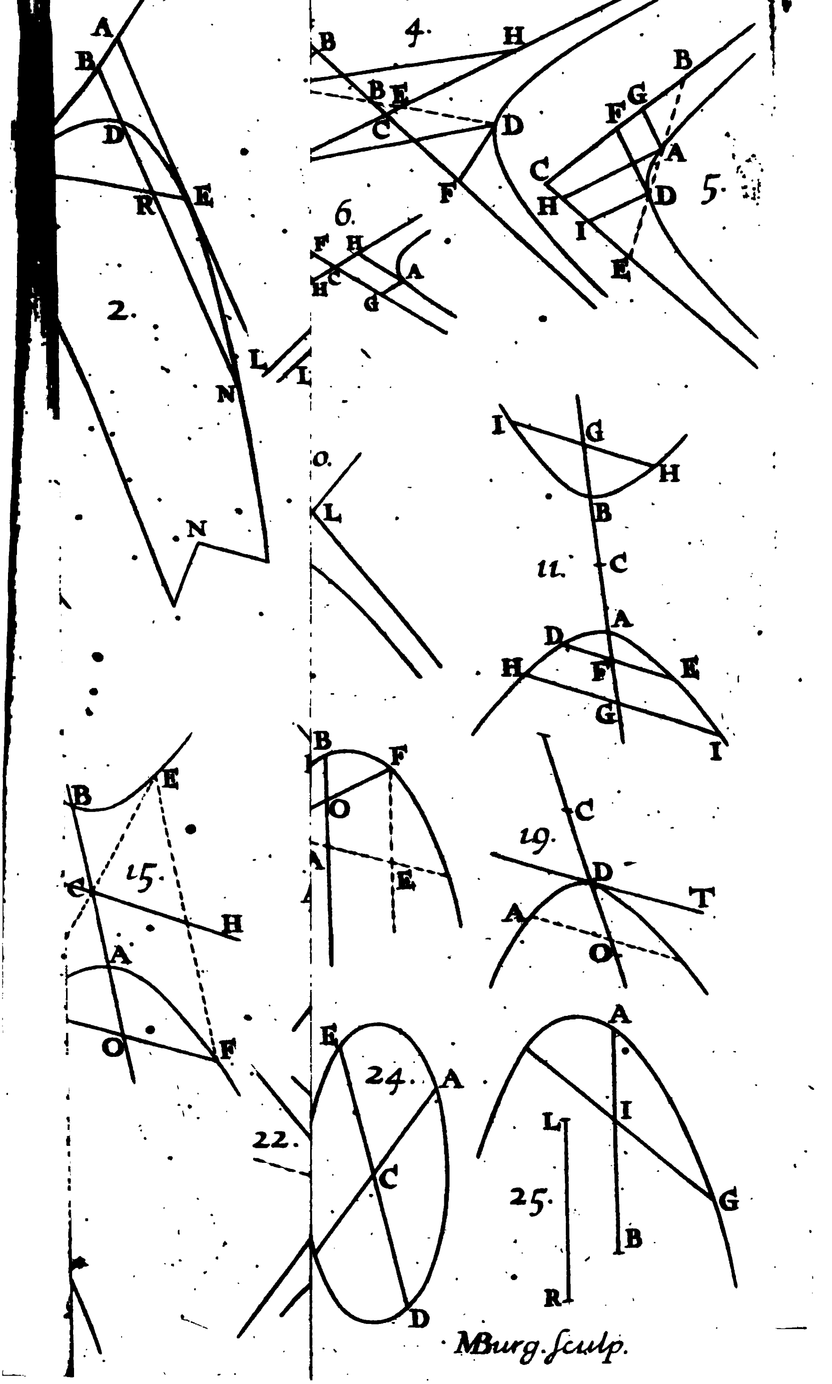
77.



78.

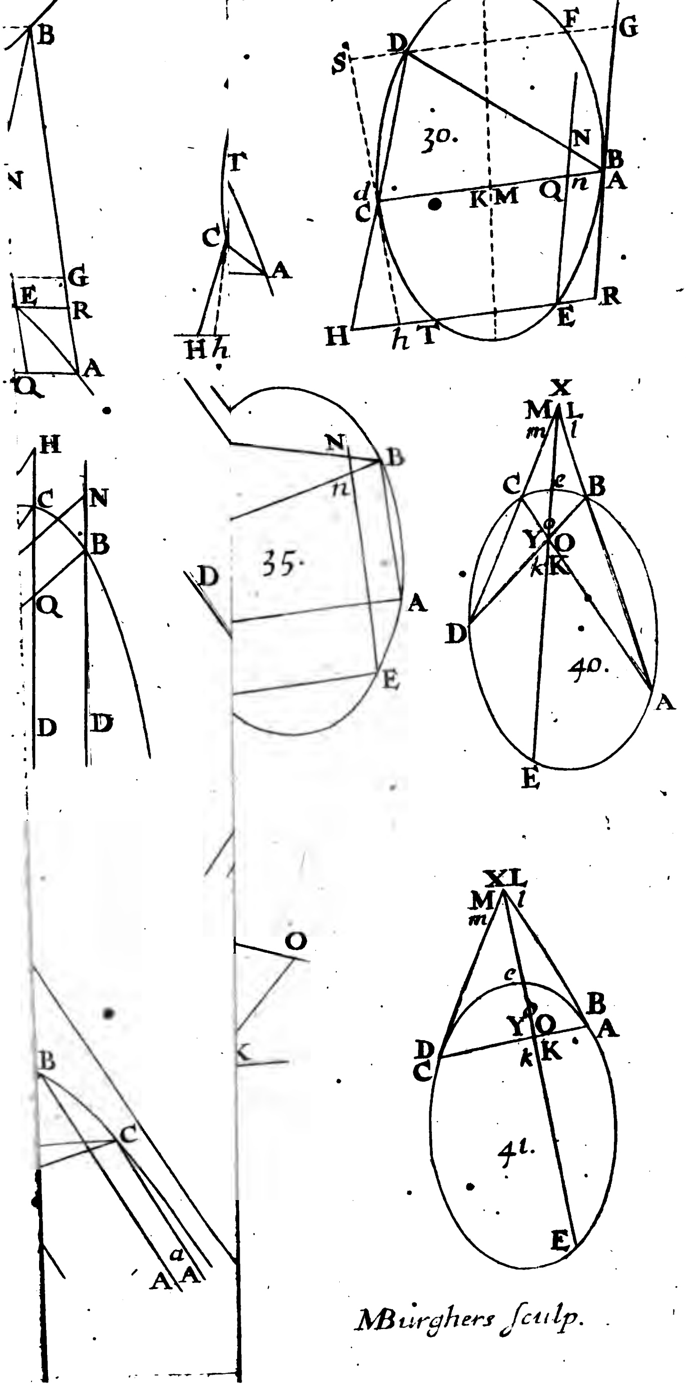

83.
B
M
E B
H
A D
87.
B
E
F
H
C
G
D
A
D
K
C
N
B
F
L M R
N
N
D
D
B
B
99.
A
B
D
R R
L R
R
B
D
K
P O
L R R
96
B
B
N
D
O
D
N
H
P
N

MBurg. sculp.


2.
A B D R E L N N
4.
B H B E C D F
5.
B G F A C D H I E
6.
F H C H A G
10.
L
11.
I G H B C A D F E H G I
15.
B E C H A O F
F B O A E
19.
C D T A O
22.
24.
E A C D
25.
A L I G B R

M Burg. sculp.

Tab. IX.



M Burghers sculp.

PARS II.

Definitiones.

SI Recta A D ita dividatur in B, C, ut sit tota A D ad utramvis partem extremam C D, ut reliqua extrema A B ad mediam B C, Recta A D *Harmonicè divisa* dicitur. 1.

Et Puncta A, B, C, D dicuntur *Puncta divisionis Harmonicæ*, Vel *Harmonicalia*.

Coroll. 1. Ob $AD : DC :: AB : BC$ Erit alternando $AD : AB :: DC : BC$.

Coroll. 2. Utravis extremarum A B vel C D est major mediâ B C. nam $AD \sqsubset CD$, vel A B.

Coroll. 3. Datis divisionis harmonicæ duobus extremis punctis E, H, & mediorum uno F, invenietur alterum G. Nempe dividendo F H in G in ratione E H ad E F; Vel E F in G in ratione E H ad H F. 2.

Coroll. 4. Sint E, F, G, H puncta divisionis harmonicæ, sitque I F utriusvis extremæ partis E F excessus supra mediam F G; Propter $EF : FG :: EH : GH$ erit divid. 3.

$$\left.\begin{matrix} EF - FG \\ IF \end{matrix}\right\} : FG :: \left\{\begin{matrix} EH - HG \\ EG \end{matrix}\right\} : HG.$$

Coroll. 5. Unde, datis divisionis harmonicæ mediis punctis F G, & extremorum uno E, invenitur alterum H. Factâ nempe $EI = FG$; Deinde faciendo $IF : FG :: EG : GH$. 3.

Coroll. 6. In casu *Coroll.* 3[i]. liquet duò tantùm puncta proposito satisfacere; ex utrâque scilicet parte puncti F unum; In casu *Coroll.* 5[i]. unicum.

Coroll. 7. Positis ut in *Coroll.* 4. Cum sit $IF : FG :: EG : HG$; quo minor est I F respectu F G, eo minor 3. 4. 5. 6.

erit EG respectu HG: si itaque sit $EF = FG$, hoc est, si IF nullius sit magnitudinis, erit HG infinita. Si sit EG finita, HG vero infinita, erit IF nullius magnitudinis; hoc est, erit $EF = FG$. Cujus rei occurrent exempla in sequentibus.

Lemma 1.

7\. *Rectâ* AD *Harmonice divisâ in* B, C, *& utrâvis extremâ parte* AB *simul cum mediâ* BC, *i. e.* AC *bisectâ in* M, *Dico*

$$MB : MC : MD \div$$

Productâ DA, fiat $Ad = CD$;

1\. Ex hyp. $AB : BC :: AD : DC$

2\. Comp. $\left.\begin{matrix}AB+BC\\AC\end{matrix}\right\} : BC :: \left\{\begin{matrix}AD+DC\\Dd\end{matrix}\right\} : DC,$

Et dimidiatis antecedentibus.

3\. $MC : BC :: MD : DC;$

4\. Divid. $\left.\begin{matrix}MC-BC\\MB\end{matrix}\right\} : MC :: \left\{\begin{matrix}MD-DC\\MC\end{matrix}\right\} : MD$

Lemma 2.

7\. *Iisdem positis, Dico* $BC : BD :: BM : BA$.

Nam ex 3. proport. suprà,

$BC : DC :: MC : MD$, & per 4m. proport.

$MB : MC :: MC : MD$ unde

$BC : DC :: MB : \left\{\begin{matrix}MC\\MA\end{matrix}\right\}$ Et comp.

5\. $BC : \left\{\begin{matrix}BC+DC\\BD\end{matrix}\right\} :: MB : \left\{\begin{matrix}MB+MA\\BA\end{matrix}\right.$

Lemma 3.

7\. *Iisdem positis, Dico* $DC : DB :: DM : DA$.

Nam ex 3. proport. supra,

$MD : MC :: DC : BC$, & ex 1a. proport.

$DC : BC :: AD : AB$; Unde

6. $MD : MC :: AD : AB$, Et divid.

$$\left.\begin{matrix} MD - MC \\ CD \end{matrix}\right\} : MD :: \left\{\begin{matrix} AD - AB \\ BD \end{matrix}\right\} : AD;$$

7. Unde altern. $CD : BD :: MD : AD$.

Lemma 4.

Iisdem positis, Dico $DC : DB :: AM : AB$. 7.
Nam ex 5. proport.

$BD : BC :: BA : MB$. Et div.

$$8. \quad \left.\begin{matrix} BD - BC \\ DC \end{matrix}\right\} : BD :: \left\{\begin{matrix} BA - MB \\ AM \end{matrix}\right\} : BA.$$

Lemma 5.

Iisdem positis, Dico $AD : BD :: AM : BC$. 7.
Nam ex proport. 1.

$BA : AD :: BC : DC$. & ex proport. 8.

$BA : BD :: AM : DC$. Unde

$AD : BD :: AM : BC$.

Def. In rectâ quâvis A D si per divisionis harmonicæ puncta A,B,C,D agantur quatuor rectæ A E, B E, C E, D E in puncto quovis E extra rectam A D concurrentes, vel inter se parallelæ; Eædem *Harmonicales* appellentur. 8. 9.

Coroll. Recta quævis ipsi A D parallela harmonicalibus in *a*, *b*, *c*, *d* occurrens harmonicè dividitur. Nam (ob parallelas rectas) secatur in eadem ratione quâ A D.

Lemma 6.

Iisdem positis, sit recta quævis F H *cuivis harmonicalium* E D *vel* E C *parallela, tribus reliquis occurrens in* F, G, H, *Dico* F G, *bisectam in* G. 10. 11.

Per G ductâ I K G L ipsi A D parallelâ, similia sunt triang. I K E, G K F, & I L E, G L H. Per *Coroll.* ad præced. def. $IL : LG :: IK : KG ::$ (per sim. triang.) $IE : FG :: IE : GH$. Unde $FG = GH$.

Lemma 7.

12. *Et conversim, Rectâ quâvis* F G H *bisectâ in* G, *& per quodvis punctum* E *extra rectam* F H *actis rectis* F E, G E, H E, *&* E D *ipsi* F H *parallelâ, Dico rectas* F E, G E, H E, D E, *esse Harmonicales.*

Per G ducatur K G L I occurrens quatuor rectis in K, G, L, I, quod fieri posse manifestum est; Erunt (ob F H || E D) similia triangula I K E, G K F, uti & I L E, G L H, unde

$$IE : GH :: IL : LG, \text{ Et}$$

$$IE : \left\{ \begin{matrix} FG \\ GH \end{matrix} \right\} :: IK : KG; \text{ Ergo ex æquo}$$

$$IL : LG :: IK : KG.$$

Hoc est, puncta K, G, L, I sunt harmonicalia; & rectæ F E, G E, H E, D E harmonicales.

Lemma 8.

13. *Si quatuor harmonicales à recta quâvis utcunque secentur in punctis* K, G, L, I, *Dico rectam* K I *harmonicè dividi.*

Si rectæ harmonicales concurrant in E, sumptis duobus quibusvis alternis punctis I, G, per alterum G ducatur H G F harmonicali I E, quæ per alterum I transit, parallela, tribus reliquis occurrens in H, G, F; Erit (per lemma 6.) F G = G H, & triangula I K E, G K F, uti & I L E, G L H similia; Unde

$$IE : GH :: IL : LG, \text{ Et}$$

$$IE \left\{ \begin{matrix} FG \\ GH \end{matrix} \right\} :: IK : KG; \text{ Ergo ex æquo.}$$

$$IL : LG :: IK : KG.$$

Si harmonicales sint parallelæ, res per se manifesta est.

Lemma 9.

14. 15. 16. &c. *Si duæ rectæ* A B C D, A F G H *harmonicè divisæ habeant quodlibet divisionum punctum* A *commune, cæteraque*

teraque divisionum puncta rectis BF, CG, DH *ordinatim conjungantur, i. e. primum unius cum primo alterius, secundum cum secundo, tertium cum tertio; à communi scilicet puncto versus utrumvis extremum progrediendo, & per alterum extremum (si opus) redeundo; vel, quod idem est, secundum unius cum secundo alterius conjungatur, cætera pro libitu; Dico rectas* BF, CG, DH *vel coire omnes in communi puncto* E, *vel esse omnes inter se parallelas.*

Primò si earum binæ quælibet *ex. gr.* HD, CG 14. 15.
coeant in E. Juncta BE secet AFGH in I, aut (si 16. 17.
fieri potest) sit ei parallela, & connectatur AE: Si 18. 19.
BE secet AFGH in I, ob divisionem harmonicam erunt EA, ~~EBI~~, ECG, EDH harmonicales, & puncta A, I, G, H harmonicalia, uti etiam ex hypothesi sunt A, F, G, H; secundo vero unius rectæ puncto cum secundo alterius connexo, puncta F, I semper cadent ad easdem partes respectu reliquorum;
Nam si punctum F sit medium (scilicet inter A, G,) 14. 15.
hoc manifestum est, cum AG angulum AEG subtendat, 16. 19.
quam ducta EBI dividit; coincident ergo puncta I, F, cùm (per *coroll.* 6. ad def. harmon. div.) inter A, G non sit aliud medium ab F diversum. Sin F 17. 18.
extremum fuerit, idem nihilominùs eveniet; non enim cadit I inter A, G medium, cum EB extra angulum AEG cadat; cumque ex punctis A, G, H duo sint media & unum extremum, non erunt (per idem *coroll.* 6.) duo adhuc extrema I, F à se invicem diversa. Coincidunt ergo I, F. *i. e.* FB transit per E.

Si EB dicatur parallela AFGH, erit AH = HG contra hypothesin.

Si duæ aliquæ conjungentium GC, HD parallelæ 20. 21.
sint, Ob similia triangula erit

$$CA : AD :: GA : AH \text{ \& comp. vel div.}$$

$$\left.\begin{matrix} AD \pm CA \\ CD \end{matrix}\right\} : AD :: \left\{\begin{matrix} AH \pm GA \\ GH \end{matrix}\right\} : AH :: \text{(ob div.}$$

harm.) CB : AB :: GF : FA unde triangula ABF, ACG

ACG similia sunt, hoc est, BF, CG, DH parallelæ.

Si puncta harmonicalia aliâ lege conjungantur, Du[arum] saltem conjungentium concurrent inter puncta connexa, duæ vero non; Unde non erit communis omnium concursus.

Lemma 10.

22. 23. *Si recta harmonicè divisa* ABCD, *& alia bifariam*
24. 25. *divisa* BFG, *habeant quodlibet divisionum punctum*
26. 27. *commune* B, *& duo reliqua bifariam divisæ puncta cum totidem alterius rectis* AF, CG *conjungantur, & per residuum harmonicè divisæ punctum* D *agatur* DH *ipsi* BFG *parallela*; *Ita tamen ut cum punctum* B *fuerit bifariam divisæ extremum, secundum unius cum secundo alterius conjungatur, sin* B *medium fuerit bifariam divisæ punctum, punctum* D *per quod parallela recta ducitur sit à communi* B *secundum*; *Cætera pro libitu. Dico rectas* AF, CG, DH *coire omnes in communi quodam puncto* E.

Ob rectarum, quarum puncta conjunguntur, partes unius quidem æquales, alterius inæquales, liquet AF, CG concurrere. Porro manifestum est, AF, CG non esse ipsi BFG parallelas, proindeque utramque huic parallelæ DH occurrere.

Sit ergo ipsarum AF, CG occursus E; Per E ductâ EI parallelâ BFG secante ABCD in I, Ob BFG bifariam divisam, & huic parallelam EI, (connexâ EB,) erunt EB, EA, EC, EI harmonicales, & puncta B, A, C, I harmonicalia, uti sunt ex hypothesi B, A, C, D, unde ostendetur (ut in priore lemmate) puncta D, I coincidere, hoc est, rectam DH transire per E.

Schol. Lemma hoc est (propriè) præcedentis casus particularis; nec puncta conjungendi lex hîc posita ab illâ diversa est; cùm (per *coroll.* 7. ad *def.* præced.) divisio bifariam sit divisio harmonica, cujus punctum

unum,

unum, ad utramvis partem, in infinitum abit; ideoque recta ab alterius rectæ puncto aliquo ducta bifariam divisæ parallela, pro puncta conjungente habenda.

Propositio I. Theorema I.

Si sectionem quamvis conicam, vel sectiones oppositas, contingant binæ rectæ A D, A G *concurrentes in* A; *per punctum verò concursûs* A *agatur recta* A L K I, *sectioni, vel utrique sectionum oppositarum occurrens in* L, I, *&* *conjungenti tactus* D G (*in opp. sect. productæ*) *in* K; *Dico eandem harmonicè dividi à punctis* A, L, K, I; *i. e.* A L : A I : : K L : K I. 28, 29. 30. 31. 32.

Hæc propositio est casus corollarii propositionis 36. p. 1. Ob insignem verò & frequentem ejus in sequentibus usum, visum est eam denuò propositam peculiari demonstratione munire, singulis casibus singulis figuris expressis.

Per I, L actæ E I M H, B L N F ipsi D G parallelæ occurrant contingentibus in E, H, & B, F, sectioni vero, vel sectioni oppositæ, vel utrique sectionum oppositarum in M, N; Erit (per Prop. 19. Part. 1.) M H = E I & N F = B L *i. e.* M E = H I & N B = F L. Et (per Prop. 17, vel 18. Part. 1.) erit

$$\left.\begin{matrix} LB \times NB \\ LB \times LF \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} EI \times EM \\ EI \times HI \end{matrix}\right\} : : DBq : DEq : : (\text{ob}$$

rectas parallelas) K L q : K I q. Rursus ob sim triang.

L B : E I : : A L : A I &

L F : H I : : A L : A I. Ductisque &c.

L B × L F : E I × H I : : A L q : A I q : : (priùs) K L q : K I q. Ergo A L : A I : : K L : K I.

Coroll. 1. In hyperbola & Ellipsi, Si recta contingens sectionem in quolibet puncto D, cuivis diametro I L (si opus productæ) occurrat in A, & à tactu D ad eandem diametrum ordinetur recta D K; Vel si ad diametrum quamvis I L ordinetur recta D K, in cujus extremo D recta D A sectionem contingens occurrit diametro 33. 34.

metro in A; Eadem diameter in punctis L, K, I, harmonicè secabitur, *i. e.* erit A L : A I : : K L : K Nam productâ D K donec sectioni denuò occurrat G, Contingens in puncto G (per *Coroll.* 17. prop. 2 part. 1.) occurret contingenti A D super diametro I in A. Unde hic casus non differt ab illo hujus propo sitionis.

33. 34. *Coroll.* 2. Unde (cum centrum hyperbolæ vel El lipseos C bisecet L I) erit per Lemma 1. hujus partis.

C K : C I : C A ∺

Et per Lemma 2^m. in Ellipsi per 3^m. in Hyperbola.

L K : C K : : A K : I K.

Et per Lemma 2. in Hyper. per 3. in Ellipsi.

L A : C A : : K A : I A

Et per Lemma 4. in Hyper. per 5. in Ellipsi.

A L : A K : : C L : I K.

Et per Lemma 4. in Ellipsi per 5. in Hyperb.

L K : L C : : K A : I A.

35. *Coroll.* 3. Si contingens Parabolam in quolibet puncto D cuilibet diametro I L occurrat in A, & à D ordinetur ad hanc diametrum recta D K, erit A I = I K. Nam productâ K D in G, Contingentes in D, G, ut supra in *Coroll.* 1. coeunt super diametro in A, Recta verò A I K L in quovis alio situ A *i k l* sectioni occurrit in binis punctis *i*, *l*, & (per hanc prop. 1.) harmonice dividitur à punctis A, *i*, *k*, *l*; Jam rectâ A *i k l* situm A I K L obtinente, abit punctum L in infinitum, unde (per *Coroll.* 6. ad def. div. harm.) A I = I K. Hanc vero parabolæ proprietatem peculiari Theoremate mox dignabimur.

36. 37. *Coroll.* 4. In hyperbolâ vel opp. sect. si recta A I K L sit utrivis asymptoto parallela, erit A I = I K. Nam in quovis alio situ A *i k l* ex una parte, erit A *i*, in divisione harmonicâ, pars extrema, & *i k* media, i.e. A *i* ⊏ *i k*; ex altera parte erit *i k* extrema & A *i* media i. e. *i k* ⊏ A *i*; proindeque in situ A I K L erit A I = I K. Patet etiam eodem modo quo in corollario præcedenti.

Coroll.

Coroll. 5. In hyperbolâ & oppositis sectionibus, si 38. 39.
contingentium altera *ex. gr.* A D (tactu D migrante in 40.
infinitum) degeneret in asymptoton, conjungens tactus G D fit recta eidem asymptoto parallela, idemque præstat quod tactus conjungens in casibus hujus prop. 1. & *Coroll.* 4. nimirum si A I K L occurrat sectioni, vel 38. 39.
sectionibus oppositis, in binis punctis, erit ut in casu hujus prop. A L : A I : : K L : K I. Si vero A I K L 40.
sit alteri asymptoto C E parallela, erit ut in casu *Coroll.* 4. A I = I K. Nam quod in alio quovis situ rectæ G D ex utrâvis parte obtinet, in situ intermedio obtinebit.

Coroll. 6. Et ut proprietates, quantumvis specie di- 41.
stinctas, aliquali affinitatis vinculo conjunctas esse, & in se mutuò transire innotescat; Si in hyperbolâ, vel sect. opp. contactuum D, G uterque in infinitum abeat, contingens utraque fit asymptotos, harumque occursus A centro coincidit; punctoque K cum tactus contingente in infinitum migrante, fit (per idem *Coroll.*) L A = A I; Est vero in hoc casu L I diameter, atque inde etiam L A = A I.

In Ellipsi vero vel sect. opp. Si contingentium oc- 42. 43.
cursus A migret in infinitum, erit (per idem *Coroll.*) L K = K I; sed & propter punctum A infinitè distans erunt D A, L A, G A invicem parallelæ, unde erit D G diameter, & L I ad hanc ordinata, atque hinc etiam L K = K I.

Prop. II. Theor. II.

Si parabolam, cujus diameter quælibet A K, *&* *ejus* 44.
vertex I, *recta* A D *ubivis in* D *contingens, eidem diametro occurrat in* A, *&* *à tactu* D *ordinetur ad diametrum recta* D K; *Dico* A I = I K.

Per D ductâ diametro D M, ad hanc ordinetur I G O, quæ erit propterea parallela A D, & bisecta in G; Ab O ad diametrum A K ordinetur O N quæ erit ideo parallela D K, eruntque triangula K D A, N O I similia;

Ob AD = IG erit IO = 2 AD; ideoque ob simil. triang. NI = 2 AK, & NO = 2 KD: Sed per *Coroll.* 4. prop. 20. p. 1. NOq = 4 KDq : KDq :: NI : KI, i. e. NI = 4 KI. Ergo 4 KI = 2 AK i. e. 2 KI = AK i. e. KI = AI.

In figuris prop. 1. & Corollariorum ejus 1, 2, 3, 4, & 5. *Coroll. ad hanc & praeced. prop.* Si ex eodem puncto A recta AD sectionem vel unam è sect. opp. contingat, altera ALI sectionem vel sectiones oppositas secet in duobus punctis L, I, vel in unico I si sit Hyperbolae asymptoto parallela, vel Parabolae diameter; Datisque tribus A, L, I inveniatur quartum divisionis harmonicae punctum K, quod sit medium inter L & I si puncta L, I sint ad eandem sectionem, extremum verò si sint ad oppositas; Vel (si AI sit asymptoto parallela, vel parabolae diameter) si fiat IK = AI; & connectatur KD occurrens denuò sectioni, vel sectioni opp. in G; Vel (si AD sit asymptotos,) si ducatur KG parallela AD secans sectionem in G: Erit connexa AG contingens. Nam datis tribus A, L, I non erit aliud har. div. punctum extremum, vel inter data L, I medium, praeter K; Nec aliud punctum divisionis bifariam ad partes sectionis praeter K; unde ex prop. 1. & 2. satis liquet propositum.

Prop. III. Theor. III.

45. 46. 47. 48. *Si sectionem quamvis conicam, vel sectiones oppositas contingant binae rectae* AF, AG, *concurrentes in* A, *& per* A *ducatur* AV *tactus conjungenti* FG *parallela; Sumptoque in* AV *quolibet puncto* V, *per* V *& medium punctum* O *tactus conjungentis ducatur* VO *occurrens sectioni, vel sectionibus oppositis in binis punctis* T, L; *Dico eandem harmonicè dividi à punctis* V, T, O, L.

Connexa AL sectioni occurrat in Q, & rectae FG in R, & ducatur QP parallela FG, eidem sectioni denuò, vel sectioni oppositae occurrens in P; erit connexa

nexa A O diameter, bisecans Q P in S. Propter A L (per præced.) harmonicè divisam, erunt O L, O R, O Q, O A harmonicales; ergo cum sit Q S = S P, & S P parallela F G, incidet punctum P (propter lemma 6. hujus p.) in rectam V O L; *i. e.* punctum P sectioni & rectæ V O L commune est, ac proinde idem cum puncto T. Sed ob A Q R L (per præced.) harmonicè divisam, erunt parallelæ rectæ A V, Q T, R O, harmonicales, & punctum L commune est; unde recta V O harmonicè dividitur à punctis V, T, O, L.

Coroll. 1. In hyperbolâ, vel sectionibus oppositis, 49.
Si punctum V ita sumatur ut sit V O alterutri asymptotôn D C parallela, manifestum est hanc uni tantùm sectionum oppositarum idque in unico puncto T 50.
occurrere; unde in hoc casu (occursu L in infinitum abeunte) fit (per *Coroll.* 7. ad def. præced.) V T = T O. Patet etiam ut *coroll.* 4. prop. 1.

Coroll. 2. Et in Parabolâ, coincidentibus punctis V, A, hoc est, existente V O diametro, fit V T = T O, ut prius ostensum. 51.

Coroll. 3. Et in omnibus casibus, puncto V in infinitum abeunte, hoc est, ductâ V T O L ipsi V A parallelâ, coincidentibus T, F, & G, L, fit T O = L O, quod & verum est ob diametrum A O.

Prop. IV. Probl. I.

A dato extra sectionem, vel sectiones oppositas, puncto 52. 53.
A, *rectas* A D, A G *ducere, quæ sectionem vel sectiones oppositas contingant. Oportet autem ut punctum* 54. 55.
A *in Hyperbolâ vel sect. opp. non sit centrum.*

Per A ducantur A I L, A *i l* sectioni vel sectionibus opp. vel utrique sect. opp. &c. in I, L, *i*, *l* occurrentes, quod fieri posse manifestum est; Datisque tribus harmonicæ divisionis punctis in utrâque rectâ A, L, I; A, *l*, *i*, inveniatur in utrâque intra sectionem quartum K, *k*; Connexa K *k* occurrat sectioni, vel sectio-

 nibus

nibus oppositis in D, G, erunt connexæ A D, A G contingentes quæsitæ.

Nam (per prop. 1.) conjungens tactus contingentium ex puncto A, transibit per K, *k*, proindeque non erit à D G diversa.

Supple figuras horum casuum. *Nota*: Si sit A I = A L, quod inter sect. opp. quandoque fieri potest, invento *k*, ducenda est *k* D G parallela I A L; nam K infinitè distat. Si A sit in alterutrâ asymptotôn, erit D G infinita, *i. e.* asymptoto parallela, unaque tantum duci potest contingens; hoc est, contingens altera erit ipsa asymptotos.

Schol. Alias methodos (easque forte aliquando commodiores) ex prop. 1. hujus partis corollariis lector facile excogitabit.

Prop. V. Theor. IV.

56. 57. 58. 59. *In plano sectionis conicæ, vel sectionum oppositarum, ductâ quâvis rectâ* V A *quæ sectioni, vel sectionibus non occurrat, nec per centrum transeat; Inventâque diametro* A O M *rectarum in sectione, vel sectionibus ipsi* A V *parallelarum, occurrente rectæ* A V *in* A; *Dico conjungentes tactus binarum quarumcunque contingentium* V H, V I, *ex quovis puncto* V *rectæ* V A *ductarum, transire per unum idemque punctum* O *in sectione, vel in alterâ sectionum oppositarum, medium scilicet rectæ* F G *conjungentis tactus contingentium* A F, A G *à puncto* A *ductarum.*

Conjungens tactus F G (per def.) ordinata est ad diametrum A O M, proindeque parallela A V & bisecta in O; connexa V O & producta occurret sectioni, vel sectionibus opp. in T, L, vel (si sit asymptoto parallela) in unico puncto T. Si occurrat in binis punctis, eadem à punctis V, T, O, L harmonicè dividitur; aliàs à punctis V, T, O bifariam dividitur, ut patet ex prop. 3. & ejus *Coroll.* 1; at per prop. 1. & *Coroll.* 4. liquet conjungentem tactus H I contingentium V H, V I transire

transire per O; cùm manentibus cæteris punctis non sit intra sectionem aliud punctum divisionis harmonicæ, vel divisionis bifariam, ab O diversum.

Coroll. 1. In hyperbolâ, Si punctum V in alteram asymptotôn incidat, contingentium ex V alterâ VI in asymptoton degenerante, recta per alterius VH contactum H eidem asymptoto parallela per O transibit: Nam HI vice fungitur tactus conjungentis. 60.

Coroll. 2. Si à puncto A extra sectionem, vel sectiones opp. ducantur duæ contingentes AF, AG, sitque tactus conjungens FG; similiter ex alio puncto V sint contingentes VH, VI, & tactus conjungens HI, occurrens FG in O; Junctâ AV, erit punctum O concursus omnium conjungentium tactus contingentium ex quovis puncto rectæ AV ductarum: & (per prop. 3. cum *Corollariis*) ductâ per O rectâ quâlibet occurrente utcunque rectæ AV, & sectioni vel sect. opp. in binis punctis, eadem harmonicè dividitur; vel bifariam dividitur tantùm, si sit alteri asymptotôn hyperbolæ parallela, vel sit parabolæ diameter. 56. 57. &c.

Prop. VI. Theor. V.

Sumpto intra sectionem conicam, vel unam sectionum oppositarum quolibet puncto O, *quod in Ellipsi non sit centrum, inventâque diametro quæ per* O *transit; per* O *ad hanc ordinetur* FOG, *sectioni in* F, G *occurrens, in cujus extremis sectionem contingant* FA, GA, *diametro* AO *occurrentes in* A, *& per* A *agatur* AV *ipsi* FG *parallela; Dico rectas* HK, IK *contingentes in occursibus rectæ cujusvis* HOI *per punctum* O *ductæ, & sectioni, vel sect. opp. in* H, I *occurrentis, convenire in punctum aliquod rectæ* AV, *aut esse eidem parallelas.* 56. 57. 58. 59.

Si contingentes HK, IK concurrant in K, agatur KO, quæ producta occurrat sectioni vel sectionibus in L, T, (quod semper fiet nisi KO sit alteri asympto-

tôn hyperbolæ parallela) & rectæ AV in V; Erit (propter diametrum) O medium punctum rectæ F G, unde recta L O T K V (per prop. 1.) harmonicè dividitur à punctis L, O, T, K, & (per prop. 3.) à punctis L, O, T, V, ergo coincidunt puncta K, V. Si L O T K V sit asymptoto parallela bifariam dividitur à punctis O, T, V, & à punctis O, T, K, unde in hoc etiam casu coincident K, V.

2. Si H O I diametro A O coincidat (in Ellipsi scilicet vel sect. opp.) manifestum est fore H K, I K ipsi A V parallelas.

60. *Coroll.* Cum eadem sit ratio rectæ per tactum asymptoto parallelæ, atque tactûs conjungentis; Si recta H O I ducta sit alteri asymptotôn parallela, Liquet tangentem in occursu ejus cum sectione H K, per ejusdem asymptoti occursum cum rectâ A V transire.

Prop. VII. Theor. VI.

61. 62. 63. 64. Supple casus omissos. *In omni Sectione Conicâ, vel sectionibus oppositis, ductâ quâvis rectâ* F G *quæ sectioni vel sectionibus oppositis in binis punctis* F, G *occurrat (vel forte unico in hyperbolâ vel sectionibus oppositis) nec per centrum transeat; Dico conjungentes tactus* H, I *binarum quarumcunque contingentium* B H, B I, *à quovis puncto* B *rectæ* F G *extra sectionem vel sectiones sumpto, ad sectionem vel sectiones ductarum, transire per unum idemque punctum* A *extra sectionem, vel sectiones; punctum scilicet, in quod coeunt contingentes sectionem, vel sectiones, in punctis* F, G; *vel in quod tangens in horum punctorum altero convenit cum asymptoto, quoties* F G *ducta est asymptoto parallela.*

Supple hunc casum. *Quod si punctum* B *in alteram asymptotôn incidat, recta per contactum unicæ contingentis à puncto* B *ductæ eidem asymptoto parallela, per idem punctum* A *transibit.*

A puncto B ducatur B K L M sectioni, vel sectionibus oppositis pro libitu in K, M occurrens, & rectæ

HI

H I si opus productæ in L, dicaturque rectarum F G, H I occursus R, & jungantur K R, M R, quarum M R si opus producta occurat eidem, vel oppositæ sectioni in N; erunt (propter B K L M harmonicè divisam) rectæ B R, K R, L R, M R harmonicales: Ducta B N (si opus producta) occurrat L R (si opus productæ) in P, K R (si opus productæ) in Q, & sectioni in O; hæc (per prop. 1. hujus p.) harmonicè dividitur in B, N, P, O, & propter harmonicales (per lemma 8.) in B, N, P, Q, coincidunt ergo puncta O, Q; sive occursus rectarum B N, K R in ipsam sectionem incidit.

Ductis igitur K S N, M T O secantibus F G in S, T, hæ (per lemma 9.) convenient super rectâ I H (si opus productâ) in punctum aliquod D; (nam si dicantur K N, H I, M O parallelæ, erit (per lemma 6.) K S = S N & O T = T M, unde F G transibit per centrum contra hypothesin.) Sed ob harmonicales L R D, N R M, B F S R T G, K R O, rectæ D N S K, D O T M harmonicè dividuntur à punctis D,N,S,K; D,O,T,M; unde (per prop. 4.) junctæ D F, D G sectionem vel sectiones oppositas contingent; vel saltem continget altera, erit altera asymptotos; *i.e.* non erunt ab A F, A G diversæ. Transit ergo I H per A.

Si M R sit asymptoto parallela, ducendæ sunt K N, B N huic parallelæ. Si G F, H I sint parallelæ (quod in sect. opp. fieri potest) ducendæ sunt M R, K R his parallelæ. Si recta quævis sit cuivis harmonicalium parallela, non harmonicè, sed bifariam secabitur. Eademque quæ priùs consequentur, adhibitis (pro re natâ) lemmate 6, vel 10. & *coroll.* 4, vel 5. prop. 1.

Prop. VIII. Theor. VII.

Sumpto extra sectionem conicam vel sectiones oppositas 61. 62.
quolibet puncto A *quod non sit centrum; Dico binas* 63. 64.
quascunque H B, I B *contingentes sectionem vel sectiones oppositas in duobus occursibus rectæ cujusvis* A H I *per punctum* A *ductæ, convenire in punctum*

aliquod

aliquod B rectæ FG conjungentis tactus rectarum AF, AG sectionem vel sectiones contingentium à puncto A ductarum; vel in punctum aliquod B rectæ quæ per contactum unicæ contingentis à puncto A ductæ alteri asymptotôn parallela ducitur, quoties punctum A in eàdem asymptoto sumptum est.

Quòd si recta AHI sit alteri asymptotôn parallela, contingens in unico ejus occursu cum sectione per ejusdem asymptoti occursum cum rectâ BFG *transibit.*

Contingentes in H, I, coeant in B; ex A ductis contingentibus AF, AG, conjungens tactus FG, si opus producta (per prop. præced.) transibit per B. Et sic (mutatis mutandis) in omnibus casibus.

Nota. Si IH sit diameter Ellipseos vel sect. opp. punctum B infinite distabit, hoc est, erunt IB, HB, GFB parallelæ.

Prop. IX. Theor. VIII.

65. 66. 67. 68. *Supple casus omissos.*

Si sectionem conicam vel sectiones oppositas contingant duæ rectæ AF, AG *concurrentes in* A; *sumptoque in tactus conjungente* FG *puncto* B, *ducantur totidem aliæ sectionem vel sectiones contingentes* BH, BI, *prioribus contingentibus in* K, L, *&* E, D *occurrentes: Dico has quatuor contingentes à mutuis occursibus, propriisque contactibus harmonicè dividi; scilicet à punctis* A, K, F, E ; A, L, G, D ; B, K, H, L; B, E, I, D ; *vel bifariam dividi tantum quando occursuum vel contactuum aliquis abit in infinitum.*

Asymptoti contingentibus, hisque parallelæ per tactus, tactus conjungentibus, (ut in prioribus) accensentur.

Conjungens tactus HI (per prop. 7.) transit per A. Et propter BG, AI harmonicè divisas à B, F, O, G; A, H, O, I punctis, aut saltem bifariam divisas, Erunt AB, AF, AO, AG, item BA, BH, BO, BI harmonicales; Unde liquet propositum.

Coroll.

Coroll. Si tres tantùm sint contingentes A F, A G, 65. 66.
B H, quarum quælibet B H conjungenti tactus reliqua- 67. 68.
rum occurrit in B, ipsis vero contingentibus in K, L; *Supple casus omissos.*
Dico hanc harmonicè dividi à punctis B, K, H, L, vel
bifariam tantùm si &c. Ducta A H & producta occur-
rat sectioni, vel sectioni oppositæ in I; Contingentes
in H & I coibunt (per prop. 8.) in aliquod punctum
rectæ F G, quod erit punctum B, in quod B H, F G,
prius coibant; Redit itaque casus in illum hujus
prop. 9. Et sic in reliquis contingentibus, & in omni-
bus casibus.

Schol. In parallelis contingentibus B H, A G in El- 67.
lipsi & opp. sect. transit casus hujus corollarii in illum
coroll. Prop. 27. partis 1.

Prop. X. Theor. IX.

In Ellipsi, & Sectionibus oppositis, si à terminis cu- 69. 70.
jusvis diametri A B *ducantur contingentes* A K, B I,
cuivis aliæ contingenti T D *occurrentes in* K, I;
Dico A K × B I *æquale esse quartæ parti figuræ dia-*
metri A B, *i. e.* (*si sit centrum* C *& parameter sive*
latus rectum l r) $CA \times \frac{1}{2} lr = AK \times BI$.

Contingens T D occurrat diametro in D, à contactu
T ordinetur ad diametrum recta T O, & à centro C
agatur ad contingentem T D recta C R rectis A K,
B I parallela: Erit per *Coroll.* 2. prop. 1.

1. $CD : CA : CO \div$ id est,
$CD : CO :: CAq : COq$.

Et dividendo

$$2. \left\{ \begin{matrix} CO - CD \\ \text{vel } CD - CO \\ DO \end{matrix} \right\} : CD :: \left\{ \begin{matrix} COq - CAq \\ \text{vel } CAq - COq \\ BO \times OA \end{matrix} \right\} : CAq;$$

Et per *Coroll.* 5. Prop. 24. Part. 1.

$$BO \times OA : OTq :: BA : lr :: \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} BA \\ CA \end{matrix} \right\} : \left\{ \frac{1}{2} lr \right.$$

 $:: CA$

$:: CAq : \left\{ \begin{matrix} CA \times \frac{1}{2} lr \\ \frac{1}{4} \text{fig. diam. } AB \end{matrix} \right\}$ vel, altern.

3. $BO \times OA : CAq :: OTq : \frac{1}{4}$ figuræ diam. AB:
Ergo (per Proport. 2, & 3.)

4. $DO : CD :: OTq : \frac{1}{4}$ figuræ diam. AB.
Per *Coroll.* 2. prop. 1.

$DA : DO :: DC : DB$, ideoque ob sim. triang.

5. $AK : OT :: CR : BI$, i. e. $OT \times CR = AK \times BI$.
Rursus ob sim. triang.

6. $OT : CR :: DO : DC :: OTq : \left\{ \begin{matrix} OT \times CR \\ AK \times BI \end{matrix} \right\}$

Ergo per proport. 4. & 6.

$OTq : \frac{1}{4}$ fig. diam. $AB :: OTq : AK \times BI$: unde $\frac{1}{4}$ fig. diam. $AB = AK \times BI$.

Si in Ellipsi contingens KTI sit diametro AB parallela; Sit CN semidiameter huic conjugata, & coincident puncta T, R, N, fietque $AK = CN = BI$, adeoque $AK \times BI = CNq =$ (per *coroll.* 4. prop. 24. p. 1.) $\frac{1}{4}$ fig. diam. AB.

69. 70. *Coroll.* 1. Positâ CN semidiametro ipsi AB conjugatâ, erit ubique $AK \times BI = \frac{1}{4}$ fig. diam. $AB =$ (per jam dictum *coroll.*) CNq.

69. 70. *Coroll.* 2. Et si ductâ diametro TCL, contingens in L occurrat IB productæ in M, erit $MB \times BI = \frac{1}{4}$ fig. diam. $AB = CNq$. Nam (ob parallelas AK, MBI, & KTI, LM; & æquales TC, CL & BC, CA,) æquiangulæ & æquales erunt figuræ $CAKT$, $CBML$; Unde $MB = AK$, & $MB \times BI = AK \times BI = CNq$.

Prop. XI. Theor. X.

71. 72. *Sint Ellipseos, vel Hyperbolæ, aut sectionum oppositarum, duæ quævis semidiametri conjugatæ* AC, CN, *quævis aliæ pariter conjugatæ* TC, CX, *ductisque* AV, NV; TS, XS, *compleantur parallelogramma* $ACNV$, $TCXS$; *Dico hæc esse inter se æqualia.*

Producta

Producta AC sectioni vel sect. opp. occurrat in B, ductaque BI parallela CN occurrat TS in I, ipsa vero TS occurrat AV in K & AB (si opus productæ) in D; à centro C ducatur CQ occurrens TS in Q, ut sit ang. DAK vel DCN $=$ DQC, agaturque huic parallela XY occurrens TS in Y, & à T ordinetur ad diametrum AB recta TO: Erunt rectæ TS, AK, BI contingentes, & triangula DAK, DOT, DQC, DBI, similia.

Per sim. triang. & *Coroll.* 2. prop. 1.

$ID : TD :: BD : OD :: CD : AD$, ideoque div. vel comp.

$$ID : \left\{ \begin{matrix} ID \pm TD \\ IT \end{matrix} \right\} :: CD : \left\{ \begin{matrix} CD \pm AD \\ CA \end{matrix} \right\} \ \&$$

altern.

1. $IT : CA :: ID : CD ::$ (ob sim.triang.) $BI : CQ$.

Rursus per sim. triang. & *coroll.* 2. prop. 1.

$KD : TD :: AD : OD :: CD : BD$, ideoque

$$KD : \left\{ \begin{matrix} TD - KD \\ TK \end{matrix} \right\} :: CD : \left\{ \begin{matrix} BD - CD \\ CB \end{matrix} \right\} \ \&$$

altern.

2. $TK : CB :: KD : CD ::$ (ob sim.tri.) $AK : CQ$.

Per proport. 1, & 2. ductis &c. & per *coroll.* 1. & 2. prop. præced.

$$\left\{ \begin{matrix} IT \times TK \\ CXq \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} CA \times CB \\ CAq \end{matrix} \right\} :: \left\{ \begin{matrix} BI \times AK \\ CNq \end{matrix} \right\} : CQq$$

Unde $CX : CA :: CN : CQ$; & $CX \times CQ = CA \times CN$. Sunt autem parallelogramma ACNV, CXYQ (ob ang. DAK $=$ DQC) æquiangula, proindeque ad invicem ut rectangula ex lateribus, viz. $CA \times CN$, $CX \times CQ$, hoc est æqualia; sed parallelogrammum TCXS (propter communem basim & altitudinem æqualem) est parallelogrammo CXYQ, adeoque ipsi ACNV, æquale

Coroll. Hinc parallelogramma circa ipsas diametros sunt æqualia, utpote horum quadrupla.

Scholium. In sectionibus opp. vel hyperbolâ, hæc propositio nullo negotio patet ex *coroll.* 2. prop. 28. p. 1.

 Nam

71. Nam si tangentes in A, T occurrant asymptotis in V, F; S, E, erit (per def.) semidiameter CN = AV = AF, & CX = TS = TE, & CN || AV, CX || ST; ideoque parallelogr. ACNV = triang. CVF = triang. CSE = parallelogr. TCXS. Sed cùm præcedens demonstratio (utpote generaliori proprietati innixa) ad hasce sectiones cum Ellipsi se juxtà extenderet, congruum erat & ipsas pariter eâdem complecti.

PARS

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.

E
4
D
D
D

G

PARS III.

Propositio I. Theorema I.

culus sectioni conicæ, quæ ipsa non sit circulus, vel 1.
sectionibus oppositis, ad quatuor plurima puncta A,
B, C, D *occurrit* ; *Ad tria* A, B, C, *quorum unum* A, 2.
Ad duo tantum A, B, *quorum utrumque est contactus.* 3.

NAM si sectio [vel sect. opp.] circulo congrueret, esset circulus contra hypothesin; Patet ergò per *Coroll.* 5. prop. 35. p. 1.

Def. In omni sectione conicâ, vel sectionibus op- 4. 5.
sitis, diametri quibus ordinatæ suæ ad rectos angu- 6.
s insistunt, ut A B, C D, *Axes* appellantur.

Prop. II. Probl. I.

Hyperbolâ vel sect. opp. & in Ellipsi quæ non sit cir- 7. 8.
culus, Axes invenire; Et duos tantum esse axes ostendere.

Inventâ quâvis diametro A B, quæ in hyperbolâ el sect. opp. sit determinata, Diametro A B (*i. e.* centro , intervallo C A, vel C B) describatur circulus MBG; Hujus peripheria vel sectionem aut sect. pp. in A, & B, continget, (quo in casu per prop. præd. ei non ampliùs occurret;) vel iterum occurret ctioni, vel sectionibus opp. in binis punctis M, G.

Si contingat in A & B, erunt ipsa A B atque huic onjugata, Axes quæsiti. Nam contingentes circulum AI, KBR in hoc casu contingent etiam sectionem el sect. opp. estque propter circulum angulus B A I, vel

vel B A H rectus, & diametri A B conjugata erit parallela A I, suntque diametri conjugatæ ad se mutuò ordinatæ, proindeque hæ diametri sibi mutuò ad angulos rectos insistent.

Si A, B non sint contactus; Ex punctorum A, B utrovis A ad punctorum M, G utrumvis M agatur A M; Bisectâ A M in N, & per centrum C ductâ C N, erunt diameter C N atque huic conjugata Axes quæsiti.

Prior casus jam satis liquet. In secundo probandum primò est circuli peripheriam sectioni, vel sectionibus oppositis in M, G occurrere, deinde angulum C N A esse rectum.

Sectionem vel sect. opp. in A, B tangant D A E, F B T, hæ (per *Coroll.* 8. prop. 20. part. 1.) erunt parallelæ; cúmque occursus A, B non sint tactus, erunt hæ à contingentibus circulum K B R, H A I, diversæ; Unde contingens sectionem B F transibit intra circulum, & contingens circulum H A transibit intra sectionem, hoc est, semicirculus B M A ad partes B est extra sectionem, vel utramque sectionum opp. ad partes vero A est intra sectionem, vel unam sectionum opp. unde necessariò occurret ei alicubi in M. Pari ratione alter semicirculus occurrit sectioni ex alterâ parte, vel sectionum opp. alteri in G.

Connexâ C M, erunt (propter circulum) C A, C M æquales, estque (ex construct.) M N = N A, unde Ang. C N A est rectus, & (per *cor.* 2. prop. 22. part. 1.) L C N O est rectæ M N A diameter, Estque huic conjugata rectæ M N A parallela, suntque conjugatæ diametri ad se mutuò ordinatæ, proindeque in nostro casu sibi mutuò ad angulos rectos insistunt.

9. 10. 2. Si jam, præter diametros O C L atque huic conjugatam Y C X hâc methodo inventas, alia quævis T C V dicatur Axis; à quovis puncto sectionis vel utriusvis sectionum opp. A, ad T C V, & ad unum ex axibus primò inventis O C L, sint ordinatæ A S R, A N M, & ducantur diametri A C B, R C Q, M C P; Ob A S = S R, & ang. A S C (ex hypoth.) rectum, erit A C = C R;

Pari

Pari modo erit A C = C M = C P = C B = (prius) C R = C Q; Unde (ob has rectas æquales) circulus centro C transire potest per sex puncta sectionis, vel sect. opp. P, Q, B, A, R, M, contra prop. præced. Unde diameter T V non erit axis, neque huic conjugata.

Coroll. 1. In Ellipsi, conjugati axes transversi L C O, X C Y sunt inæquales. Aliàs, connexâ L Y & bisectâ in D, ductâque diametro B C D E, esset (ob L C = C Y) angulus L D C rectus, cujus contrarium jam ostendimus. 11.

Coroll. 2. In Hyperbolâ Axis transversus O C L est minima omnium determinatarum diametrorum, & huic propiores sunt remotioribus minores. Nam si T V dicatur minor quam L O, semicirculus diametro L O secabit T V in Z alicubi intra unam sectionum opp. & eidem sectioni occurret denuò in A; unde diameter B C P quæ bisecat junctam O A in P, (propter C A = C O, & O P = P A) erit axis, contra jam probata. Pari prorsus modo ostendetur T C V esse remotiore quâvis diametro minorem. 12.

Coroll. 3. In Ellipsi axis major est omnium diametrorum maxima, minor vero minima: & minori propiores sunt remotioribus minores; majori, majores. Nam si T V dicatur minor quam Y X; Semicirculus diametro Y X secabit T V extra sectionem in Z, secabit vero axem majorem (propter C O = C X) alicubi intra sectionem in F; occurret itaque sectioni alicubi in A; unde ostendetur ut in præcedenti *Corollario* diametrum B C P quæ connexam X A in P bisecat, esse axem, ab ipsis O L, Y X diversum, contra jam ostensa. Eodem modo ostendetur majorem axem O L esse quâvis aliâ diametro T V majorem, & majori propiores remotioribus majores esse, minori minores. 13.

Coroll. 4. In hyperbolâ vel opp. sect. & Ellipsi, Diametri M C G, A C B ductæ ab extremis ordinatæ cujusvis M A ad utrumvis axem L O sunt æquales; Idem intellige de contingentibus M E, A E in punctis M, A, super 14. 15. 16.

per

per axi (per *Coroll.* 17. prop. 20. p. 1.) in puncto aliquo E coeuntibus. Patet ob MN = NA, ob communes EN, NC, & angulos ad N rectos.

14. 15. *Coroll.* 5. In iisdem sectionibus, Recta E C bifariam
16. dividens angulum vel à binis æqualibus contingentibus, vel binis æqualibus diametris factum, erit Axis. Nam bisecabit M A, eidemque ad angulos rectos insistet. In hyperbolâ vel opp. sect. rectæ, quæ bifariam dividunt utrumque angulum asymptotôn, sunt Axes conjugati.

14. *Coroll.* 6. Et quarum diametrorum angulum utervis axis bifariam dividit, eædem sunt æquales. Nam in Ellipsi *ex. gr.* Si dicas C Q (⊐ vel ⊏ C M) = C A: Junctâ A Q secante axem in P, & Sectionem in R; ob æquales angulos Q C P, A C P, & C A = C Q, erit A P = P Q, & angulus ad P rectus; unde A P R est ad axem ordinata, hoc est A P = P R = (priùs) P Q, quod absurdum est. Et eodem modo (ductâ hujusmodi A P Q R) in hyperbolâ vel sect. opp. hoc *Corollarium* demonstrabitur.

14. 15. *Coroll.* 7. Quæ diametri M C G, A C B æqualiter ab
16. utrovis axe distant, æquales faciunt angulos ad contingentes in earum verticibus C M E, C A E. Nam triangula C M E, C A E similia & æqualia sunt.

Coroll. 8. Ex *Coroll.* 2, & 3. Liquet Circulum super axi determinato Hyperbolæ vel sectionum oppositarum, tanquam diametro, descriptum, totum esse extra utramque sectionem: Super Ellipseos axi majore, sectionem intra se continere: Super Ellipseos axe minori, à sectione contineri.

Prop. III. Probl. II.

17. *Invenire Axem Parabolæ: Et unicum ejus esse axem ostendere.*

Inventâ quâlibet diametro C D, sumptoque in eâdem ubivis puncto D, erigatur ad eandem perpendicularis E D F occurrens sectioni in E, F; Bisectâ E F in B,

ductâque B A parallelâ C D, Erit BA axis quæsitus. Nam (per *Coroll.* 16. Prop. 20. p. 1.) B A est rectæ E F diameter, & (ob rectas parallelas) erit angulus A B F rectus.

Si punctum D bisecet E F, ipsa diameter C D primò inventa est axis.

2. Si dicas alium esse axem C D ab A B diversum: Ordinatâ ad hunc F D E secante axem primò inventum in B; Ob parallelismum diametrorum erit E F ad utrumque axem C D, A B perpendicularis, hoc est, ad utrumque ordinata, ideoque tam in B quam in D bisecta, quod absurdum est.

Coroll. 1. Contingentes M E, A E in extremis rectæ cujusvis M A ad axem ordinatæ sunt æquales. 18.

Coroll. 2. Recta bifariam dividens angulum ab æqualibus contingentibus factum est axis. Patet utrumque sicut in hyperbolâ vel sect. opp.

Coroll. 3. Diametri M G, A B æqualiter ab axe distantes æquales faciunt angulos ad contingentes in earum verticibus, viz. G M E, B A E. Patet ob similia & æqualia triangula E M N, E A N, & angulos G M N, B A N rectos.

Coroll. 4. Angulus E M G, quem quævis diameter facit cum contingente in ejus vertice versus axem, obtusus est, utpote recto G M N major: Et quo diameter M G ab axe remotior est, eo hujusmodi angulus major est; Nam contingens *e m* in vertice propioris diametri *m g* producta occurret E M & E O extra sectionem in P, *e*; ductâque *m n* parallelâ M N, erit ang. P *e* N = ang. P E N + E P *e*, unde P *e* N $\sqsubset$ P E N, & *e m n* $\sqsupset$ E M N, additisque utrinque rectis, *e m g* $\sqsupset$ E M G.

Prop. IV. Theor. II.

In Ellipsi diametri I C H, K C G *rectarum* A E, A D *utriusque axis extrema conjungentium sunt conjugatæ, & æquales; & præter ipsas non sunt aliæ diametri conjugatæ æquales.* 19.

19. Junctis E B, D B, ob C D $=$ C E & C A $=$ C B & angulos ad centrum rectos, erit A E B D figura parallelogramma cujus latera æqualia; unde diametri, I H, K G bisecant etiam E B, D B, ac propterea erunt rectis E A, A D respectivè parallelæ; Hoc est, erunt diametri I H, K G conjugatæ: Erit porro A F C N (ob A F $\parallel$ C N & A F $=$ A N, utpote æqualium A D, A E dimidia) figura parallelogramma cujus latera æqualia; Unde axis A C B bifariam dividet ang. F C N; sunt ergo (per *Coroll.* 6. Prop. 2.) diametri K G, I H æquales.

20. 2. Stantibus quæ in priore figurâ, Sit A B axis major, E D minor, & O P, Q R duæ quævis diametri conjugatæ, ab ipsis H I, G K & ab axibus diversæ; Harum una Q R dividat *ex.gr.* angulum D C K, & in R contingat T R L: Hæc (per *Coroll*, 6. Prop. 23. p. 1.) occurret diametris I H, G K productis in L, T, proindeque huic parallela O P cadet extra angulum H C K; pari vero ratione eadem O P cadet extra angulum D C B, hoc est intra angulum A C D; unde dividet necessariò angulum A C H; Est itaque (per *Cor.* 3. prop. 2.) O P $\sqsubset$ H I, & H I $=$ G K $\sqsubset$ Q R, hoc est, O P $\sqsubset$ Q R; ideoque O P, Q R inæquales.

20. *Coroll.* 1. In Ellipsi majoris diametri transversæ minor erit secunda huic conjugata, minoris major. Nam referant jam G K, H I duas quascunque diametros conjugatas, sive æquales, sive inæquales, O P, Q R alias quascunque pariter conjugatas; sintque axes A B major, E D minor, ut priùs: Et si Q R dividat *ex.gr.* anangulum D C K, ostendetur (ut priùs) O P dividere angulum A C H; unde (per *coroll.* 3 prop. 2.) erit O P $\sqsubset$ H I & G K $\sqsubset$ Q R. Contrarium accidit in hyperbolâ, vel sect. opp. ut suo loco ostendemus.

Coroll. 2. Hinc si duæ contingentes Ellipsim Q M, G M concurrant in M, contingens Q M in vertice minoris diametri Q R major erit quàm contingens G M in vertice majoris diametri G K. Nam Q M, G M, sunt diametrorum Q R, G K conjugatis O P, H I respectivè parallelæ; Estque (per prop. 17, vel 18. p. 1.)

Q M q

$QMq : MGq :: OC \times CP = OCq : HC \times CI = HCq$; Estque (per *coroll.* præced.) $OP \sqsubset HI$, hoc est $OC \sqsubset HC$; unde $QM \sqsubset GM$.

Schol. Cum in Hyperbolâ (non æquilaterâ) semidiameter transversa CB semidiametro secundæ CD, hoc est semicontingenti BL, sit ubique inæqualis; Vertice vero B in infinitum abeunte & coincidentibus punctis L, C, rectæ CB, BL asymptoto & sibi invicem coincidant, hoc est, tum demum fiant æquales: Respondebunt aliquatenus Hyperbolæ asymptoti Ellipseos diametris conjugatis æqualibus; sed cum hoc discrimine, quod Ellipseos diametri sint altera alterius, utravis vero asymptotos sit quasi sui ipsius conjugata. *Vide fig. 90. partis primæ.*

In Hyperbolâ æquilaterâ diametri conjugatæ sunt ubique æquales; uti etiam in Ellipsi, si Ellipsis sit circulus; Nam quod circulus est inter ellipses, id hyperbola æquilatera (quoad proprietates saltem nonnullas) inter hyperbolas.

Prop. V. Probl. III.

In Hyperbolâ, & inter sectiones opp. & in Ellipsi, invenire diametros quæ cum suis ordinatis angulum faciunt dato cuivis angulo non recto Q, *vel ejus complemento ad duos rectos, æqualem; qui tamen in Ellipsi non sit major eo quem faciunt rectæ* BD, AD *ab utroque extremo axis majoris ad utrumvis extremum minoris ductæ, nec minor eo quem faciunt rectæ ab utroque extremo axis minoris ad utrumvis extremum majoris ductæ.* 21. 22.

Super utrovis axe Ellipseos, vel determinato hyperbolæ, vel sect. opp. AB, tanquam chordâ, statuatur arcus circuli AEB capiens angulum dato angulo Q vel ipsius complemento æqualem, qui (si opus) post AB continuetur; occurret hic Sectioni, vel utrique Sectionum oppositarum (præter A, B) in duobus punctis F, R; sumpto horum utrovis F, connectantur AF,

B F, quibus bifariam divisis in L, O, ductisque diametris H L C M, N O C P; Hæ duæ diametri, totidemque aliæ eodem modo ope puncti R reperiendæ, proposito satisfacient.

21. In Ellipsi sit (exempli gratiâ) A B axis major, Sectionem contingat I A, in A; circulum contingat recta G A; Erit (propter axem) ang. I A B rectus; cumque arcus A E B (ex hypoth.) non sit anguli recti capax, contingens G A cum rectâ B A faciet ex unâ parte angulum acutum, transibitque ideo ex eâdem parte intra sectionem, hoc est, arcus ipse transibit intra sectionem: Rursum arcus super chordâ A B capiens angulum æqualem A D B, transibit per D; ergo arcus qui (ex hypoth.) capit angulum minorem quàm A D B secabit axem minorem extra Sectionem in E; Est ergo idem arcus ad partes A intra Sectionem, ad partes vero E extra eandem; secabit ergo illam alicubi in F inter A, E; Pari ratione secabit eandem in R inter E, *B*. Idemque erit (mutatis mutandis) in axe minori.

22. In Hyperbolâ vel sect. opp. contingat I A unam è sectionibus oppositis, & A G circulum: Ob angulum B A I rectum & B A G obliquum, non coincident I A, A G, sed angulum efficient; unde recta quævis angulum I A G dividens, transibit tam intra circulum quàm sectionem, hoc est, circuli circumferentia ad puncta A, B (nam utriusque eadem est ratio) transit intra sectiones, quæ (cum in se revolvatur) utrique necessariò occurret denuò in F, R.

21. 22. Jam in utrâque figurâ, propter F L $=$ L A & B C $=$ C A, erit C L parallela B F & A F parallela C O; unde ang. C L A $=$ C O B $=$ B F A $=$ dato Q, vel ejus complemento. Idemque erit de diametris ope puncti R repertis.

Coroll. 1. In hyperbolâ vel opp. sect. manifestum est angulum Q sumi posse dato cuivis obtuso vel acuto æqualem; Angulumque quem determinata aliqua diameter facit cum suis ordinatis, vel cum contingente in ejus vertice, eo obliquiorem esse quo magis eadem diameter

meter ab axe determinato distat; & pariter in diametro huic conjugatâ. In Ellipsi hujusmodi angulus ab utrovis axe ad utramvis diametrorum conjugatarum æqualium fit semper obliquior, atque inde ad alterum axem continuò ad rectum vergit. Nam in hyperbolâ vel sect. opp. angulus B F A = C L A, quo punctum F ab A remotius est, eo continuò minor est, donec abeunte puncto F in infinitum, dato quovis angulo minor fiat. In Ellipsi quò punctum F ab A remotius est, eo angulus B F A major est; donec, coincidente puncto F ipsi D, fit C L una diametrorum æqualium; atque inde ad B fit idem angulus continuò minor, donec, coincidentibus punctis F, B, recta A F, hoc est jam A B, fit ad axem minorem ordinata. Quâ in re, ulteriorem æqualium Ellipseos diametrorum cum Hyperbolæ vel sect. opp. asymptotis analogiam observare licet.

Coroll. 2. In Ellipsi, liquet angulum C L A vel C O B à semiaxe majore subtensum esse obtusum; Nam huic æqualis B F A insistit arcui B A semicirculo majori: In hyperbolâ liquet angulum C L A vel C O B esse acutum, nam huic æqualis B F A insistit arcui A E B semicirculo minori. Idem intellige de angulis quos ad easdem partes hæ diametri faciunt cum contingentibus in earum verticibus; sunt enim hæ contingentes ordinatis parallelæ.

Prop. VI. Probl. IV.

Idem in Parabola præstare.

Inventâ quâlibet diametro K B L, per punctum ejus intra sectionem B ad hanc inclinentur duæ rectæ A B I C, D B G E in angulis K B E, L B C dato Q æqualibus, occurrentes sectioni in A, C; D, E; Bisecentur A C, D E in I, G; per I, G agantur diametri H I, F G. Propter diametrorum parallelismum erunt anguli H I B, F G E æquales dato Q; unde proposito satisfit. 23.

Coroll.

Coroll. Manifestum est (per *Coroll.* 3, & 4. prop. 3.) diametros F G, H I ab axe M N æqualiter utrinque distare; & propterea quod hujusmodi rectæ A B C, D B E in quocunque angulo ad diametrum K B inclinatæ semper utrinque sectioni occurrant, angulum Q, sicut in hyperbolâ, vel sect. opp. cujusvis magnitudinis sumi posse.

Prop. VII. Theor. III.

24. *In Hyperbolâ secunda diameter axi conjugata, vel quod idem est, contingens in ejus vertice* E B D *asymptotis terminata, minor est quàm contingens in vertice cujuslibet alterius diametri ut* H F G; *& quo quælibet diameter est axi propior, eo ejusmodi contingens minor est, major quo remotior.*

Per tactum F & utrumvis rectæ G H extremum *ex. gr.* H, agantur F N L, H I K parallelæ E B D, secantes axim in N, I, & asymptoton C G in L, K, & connectatur L I. Ob G F $=$ F H, erit H K $=$ 2 F L; & ob E B $=$ B D, erit I H $=$ I K, hoc est I H $=$ F L; unde (ob parallelas rectas) erit I L $=$ F H: Et (si A B dicatur axis) ob angulum I N L rectum, erit I L $\sqsubset$ L N, *i. e.* F H $\sqsubset$ L N; unde multo magis F H $\sqsubset$ D B, *i. e.* G H $\sqsubset$ E D.

2. Si A B non sit axis sed alia quælibet diameter, & M F quælibet diameter ab axe remotior quam A B; erit angulus quem faciunt rectæ A B, E D ad partes axi contrarias obtusus, cum (per *Coroll.* 2. prop. 5.) ad partes axis sit acutus; hoc est, erit angulus A B E, ideoque & huic æqualis L N I obtusus; ergo in hoc quoque casu L I $\sqsubset$ L N; cæteraque consequentur ut in casu priore, unde patet propositum.

Coroll. 1. Hinc (contra quàm in Ellipsi) majoris diametri transversæ major est secunda huic conjugata, minoris minor. Nam quo magis diameter hyperbolæ ab axe distat eo major est, ut in *Cor.* 2. Prop. 2. ostensum est.

Coroll.

Coroll. 2. Positis ut prius, sit contingentium H F G, E B D concursus O, erit F O $\sqsubset$ B O. Nam (per Prop. 16. p. 1.) G F q : E B q : : O F q : O B q ; unde (ob G F $\sqsubset$ E B) erit O F $\sqsubset$ O B. Idem erit in Sectiones oppositas contingentibus.

Lemma.

In figuris A B C D, *sit* B C $=$ C D, *& ang*. A C D *ob-* 25. 26.
tusus, i. e. *ang*. A C B *acutus*, *Dico* A D $\sqsubset$ A B.

Ab A in D B (si opus productam) cadat perpendicularis A E, ob ang. acutum cadet hæc ad puncti C partes B, ideoque D E $\sqsubset$ B E ; Estque

$$A\,Dq = A\,E\,q + D\,E\,q$$
$$A\,B\,q = A\,E\,q + B\,E\,q \sqsupset A\,E\,q + D\,E\,q$$

unde A D $\sqsubset$ A B.

Prop. VIII. Theor. IV.

Parabolam in punctis B, D *contingant* B A, D A *concur-* 27. 28.
rentes in A, *tactusque* B *vel axis* L M N *vertici coincidat*, *vel sit eidem axi tactu* D *propior*, i. e. *ordinata ad axem* B M *sit minor quam* D N ; *Dico* D A $\sqsubset$ B A.

Connexâ D B & bisectâ in C, erit juncta A C (per Prop. 20. p. 1.) ejusdem diameter, & parallela M N ; Si B sit axis vertex, vel si B, D sint ex eadem parte axis, manifestum est A C non coincidere axi ; Idem liquet si sint ex axis partibus diversis propter B M $\sqsupset$ D N & C B $=$ C D : Producta si opus D B occurret axi in O, eritque ang. L O D *i. e.* A C D obtusus, Unde per Lemma præcedens liquet propositum.

Prop. IX. Theor. V.

In omni Sectione Conicâ, ad axem A H I, *qui sit de-* 29. 30.
terminatus Hyperbolæ, sed utervis Ellipseos, ordine- 31.
tur recta C H B, *occurrens Sectioni in* C, B ; *In punctis vero* C, B *Sectionem contingant* C A, B A *super*

axi

axi concurrentes in A, *vel in Ellipsi forte axi parallelæ; describaturque circulus* CEBI *qui rectam* CA (i. e. *sectionem*) *in* C *contingat, transeatque per punctum* B: *Dico eundem rectam* BA, *vel* (*quod perinde est*) *sectionem, in* B *contingere; & præter puncta* B, C, *totum esse intra sectionem, si in Ellipsi* AHI *fuerit axis major; Sin* AHI *fuerit Ellipseos axis minor, præter eadem puncta* C, B, *totum esse extra sectionem.*

29. 30. 31. In omnibus casibus occurrat axis sectioni in D, circulo in E; Si concurrant CA, BA, propter axem erit (per *Coroll.* 4. Prop. 2. & *Coroll.* 1. Prop. 3.) $AB = AC$, unde AB (ex Elementis) circulum continget in B, id est (ex def.) circulus sectionem continget. Per D & E agantur FD, GE parallelæ BC, utrivis contingenti BA occurrentes in F G: Cùm sit axis AH ad BC perpendicularis, erit sectionis & circuli communis diameter, ideoque (per *Coroll.* 8. Prop. 20. p. 1.) FD sectionem, GE circulum continget, eritque (per *Coroll.* 3. Prop. 4. vel *Coroll.* 2. Prop. 7. vel per Prop. 8.) $BF \sqsubset FD$, vel si AH sit Ellipseos axis minor $FD \sqsubset BF$; Si sit $BF \sqsubset FD$, cum sit propter circulum $BG = GE$, erit necessariò $BG \sqsupset BF$; nam si BG dicatur $\sqsubset$ vel $= BF$, cadet GE ad rectæ FD partes A, vel eidem coincidet, hoc est erit $GE \sqsupset$ vel $= FD$, adeoque (ob $BF \sqsubset FD$) erit $BG \sqsubset GE$ contra circuli naturam. Est ergo $BF \sqsubset BG$ *i. e.* (ob rectas parallelas) $HD \sqsubset HE$, hoc est, punctum E cadet intra sectionem. Pari ratione occursus alter axis cum circulo I erit intra ellipsin: Nam in hyperbola & parabola per se manifestum est.

31. Si AHI sit axis minor ellipseos, erit $BF \sqsupset FD$; unde haud absimili modo ostendetur puncta E, I cadere extra sectionem. Propter duos contactus B, C, circulus (per Prop. 1.) sectioni non amplius occurrit: ergo in priori casu (*viz.* cum E, I sint intra sectionem) circulus totus erit intra sectionem; in posteriori (ubi hæc puncta sunt extra sectionem) totus erit extra sectionem.

Si

Si in Ellipsi A B, A C parallelæ sunt, erit B C axis; unde (ex *Coroll.* 8. Prop. 2.) patet propositum.

Coroll. In figuris 29, 30. Liquet Circulum C E B I maximum esse omnium sectioni inscriptibilium & eandem in puncto C tangentium; In fig. 31. Circulum C E B I minimum esse omnium Ellipsi circumscriptibilium & eandem in puncto C tangentium: Nam (fig. 29, 30.) ejusmodi major quivis secabit B C extra sectionem; In fig. 31. minor quivis secabit B C intra sectionem. 29, 30. 30, 31.

Prop. X. Theor. VI.

Iisdem positis, rectisque C A, B A *concurrentibus, si per* B *agatur diameter* B M K, *& ad hanc à puncto* C *ordinetur recta* C V R, *occurrens sectioni denuò in* R; *describatur verò circulus rectam* C A (i. e. *sectionem*) *in puncto* C *contingens, transiensque per punctum* R; *Dico hunc circulum præter tactum* C *in unico hoc puncto* R *sectioni occurrere, Hoc est, ex unâ parte rectæ* C R *totum esse extra sectionem, ex alterâ intra sectionem.* 32, 33. *Supple figuras hyperb. & parab.*

In Hyperbolâ, Parabolâ, & Ellipsi cujus axis major sit A H, Circulus rectam C A in C contingens & per punctum quodvis N sectionis à B diversum transiens, major erit circulo (in priore prop.) per B transeunte, (nam circulus per B totus intra sectionem cadit,) & secabit rectam C B productam extra sectionem in S, hoc est, circulus C N S ad partes B erit extra sectionem. 32.

Ex N ordinatâ ad diametrum B M K rectâ N T O, occurret circulus sectioni denuo in O: Nam producta O N occurrat A C in L; & propter O N L || A B, erit (per Prop. 17, & 18. p. 1.) C L q : L N x L O :: C A q : A B q *i. e.* (ob C A q = A B q) erit C L q = L N x L O, unde cùm punctum N sit ad circulum, erit & O; & cum C sit contactus, circulus C N S O (per Prop. 1.) nisi in C, N, O sectioni non occurret; hoc est, cum S sit extra sectionem, arcus N O erit extra sectio-

 nem,

nem, arcus verò CN, CO intra sectionem: Nam si dicatur circulus ex utrâque parte N, vel O, esse extra sectionem, ex tribus occursibus C, N, O saltem duo erunt contactus, quod (per Prop. 1.) fieri nequit; eritque (ob punctum R extra circulum CNO) circulus CR major circulo CNO.

Augente se circulo CNO, & accedente puncto N ad C, accedet simul O ad R, & coincidentibus tandem N, C, coincident simul O, R; & evanescente arcu CN, totus arcus CSO, *i. e.* jam CR erit extra sectionem; vel circulus ad rectæ CR partes B, est extra sectionem.

33. Porro ex alterâ parte rectæ CR, sumpto in sectione puncto N, quod in Ellipsi non sit punctum K, ductâque LNO, ut prius; circulus in C contingens & per N transiens ostendetur (ut prius) transire per O; circulus vero CNO nisi in C, N, O sectioni non occurrit; & in Hyperbolâ & Parabolâ (quæ ex hac parte infinitæ sunt) manifestum est arcum NO esse intra sectionem.

33. In Ellipsi vero ductâ contingente KP, erit hæc parallela AB; unde (ob ABq : ACq : : KPq : PCq & AB = AC) erit KP = PC, unde punctum P (per *Coroll.* 5. Prop. 2.) est ad axem minorem, & CK erit ad eundem axem ordinata, circulusque contingens in C & per K transiens (per Prop. præced.) erit totus extra sectionem, hoc est comprehendet punctum N vel O; unde (ob tactum C) circulus CNO minor erit circulo per K, & secabit rectam CK intra sectionem in S, hoc est, arcus NSO erit intra sectionem.

33. In omnibus igitur sectionibus arcus NO est intra sectionem: Erunt vero in omnibus, arcus CN, CO extra sectionem; nam si dicatur circulus ex utrâque parte puncti N vel O esse intra sectionem, è tribus occursibus duo saltem erunt contactus, quod absurdum est; Comprehendit insuper circulus CNO punctum R, proindeque est (ob tactum C) circulo CR major.

Minuente se circulo CNO, & accedente puncto N ad C, accedet simul O ad R, & coincidentibus N, C, coincident simul O, R; & evanescente arcu NC, totus

arcus

arcus C S O, hoc est, jam arcus C R erit intra sectionem; vel circulus ad rectæ C R partes K (*i. e,* ipsi B contrarias) est intra sectionem. Liquet ergo propositum.

Coroll. 1. Hinc; Quámvis circulus Sectioni Conicæ occurrens, & ex utrâque occursûs parte ad easdem sectionis partes cadens, in eodem occursu sectionem necessariò contingat; Non tamen circulus sectionem conicam contingens, necessariò ex utrâque contactûs parte ad easdem ejus partes cadit.

Coroll. 2. Cum omnis circulus sectionem in C contingens, & per punctum quodvis sectionis ex unâ parte rectæ C R (quantumvis puncto R propinquum) transiens minor sit circulo C R, & ex utrâque parte contactûs intra sectionem reperiatur, hoc est, magis incurvetur quàm sectio in puncto C; Circulus vero illam in eodem puncto contingens & per punctum quodvis sectionis ex alterâ ejusdem rectæ parte transiens sit major circulo C R, & ex utrâque contactûs parte cadat extra sectionem, hoc est, minùs incurvetur quàm sectio in eodem puncto C: Sectionem in hoc puncto C circulo C R, æquicurvam esse meritò existimare licet. 32. 33.

Schol. Si axis A H in Ellipsi ponatur minor, eadem erit demonstratio sed inversa; *viz.* pro *major*, legendo *minor*, pro *intra*, *extra*; & vice versâ.

Prop. XI. Theor. VII.

Iisdem positis; per C *ducatur diameter* C L, *quæ* (*si opus producta*) *occurrat circulo* C R *in* Q; *Dico* C Q *æqualem esse rectæ* D F *quæ est parameter diametri* C L. 34, 35. *Supple figuras parab. & hyperb.*

In omnibus sectionibus, sit Circulus C N O, idem qui in figuris præcedentibus, secans C Q in X; à puncto N (*viz.* punctorum N, O rectæ A C propinquiore) ad diam. C L, ordinetur N P I S, occurrens scilicet diametro C L in I, & circulo denuò in S; & à puncto C erigatur ad C A perpendicularis C P, secans N S in P; Erit hæc circuli diameter & (ob C A || N S) bisecabit

N S in P. Si punctum I non sit primo intra circulum C N O; Augente vel minuente se circulo C N O prout puncta N, O fuerint ad has vel illas partes rectæ C R, cùm, accedente N ad C, & O ad R, accedat continuò I ad C, & X ad Q, transibit tandem necessariò punctum I intra circulum C N O; eritque P I (ob S P = P N) ipsarum I S, I N semidifferentia.

In Hyperbolâ & Ellipsi, in rectâ D F (productâ in hyperbolâ) intelligatur punctum E mobile, hâc lege, ut accedente I ad C, sit semper L C : C I :: D F : F E; Eritque (per Prop. 24. p. 1.) C I × D E = N I q, hoc est,

C I : N I :: N I : D E; & ob circulum erit
C I × I X = N I × I S, hoc est,
C I : N I :: I S : I X; Unde
N I : I S :: D E : I X.

Accedente jam puncto N ad C, accedit simul O ad R, adeóque X ad Q; fitque ipsarum N I, I S semidifferentia P I continuò minor; hoc est, rectæ N I, I S, proindeque his proportionales D E, I X continuò ad æqualitatem vergunt; Et tandem coincidentibus punctis S, I, P, N ipsi C, puncto O ipsi R, adeoque X ipsi Q, & evanescente P I, evanescunt simul I N, I S, sed eodem tempore rationem æqualitatis adeptæ; unde evadit simul I X = D E, hoc est jam C Q = D E; Coincidentibus vero I, C, coincidunt simul E, F, hoc est C Q = D F.

In Parabolâ, Erit (misso puncto E) propter sectionem C I × D F = N I q, hoc est,

C I : N I :: N I : D F, & propter circulum
C I : N I :: I S : I X; unde
N I : I S :: D F : I X; Et ad morem præcedentium, ostendetur, evanescentibus N I, I S, ipsas D F, I X simul fieri sibi mutuò, & rectæ C Q, æquales.

Corollaria ad hanc & prop. præced.

34, 35, 36, 37, 38. *Coroll.* 1. In Sectionis Conicæ quâlibet diametro C L (productâ si opus in Ellipsi,) si fiat C Q æqualis ejusdem diametri parametro, & in puncto C sectionem contingat recta C A; Circulus rectam C A in C contingens & per

& per punctum Q transiens erit sectioni in hoc puncto C æquicurvus. Si diameter CL non sit axis, satis liquet ex præcedentibus, nam non erit à circulo CR diversus. Cùm vero hæc proprietas competat cuilibet diametro præter axem, etiam axi competet; Nam diameter axi infinite vicina ab axe non differt, neque hujus parameter ab axis parametro.

Coroll. 2. Coincidente puncto C axis vertici G, (qui in ellipsi sit major,) coincident etiam ei puncta B, R, arcusque circuli CR qui prius erat extra sectionem evanescet, hoc est totus circulus CR erit intra sectionem. Puncto vero C (in Ellipsi) minoris axis vertici coincidente, arcus circuli qui prius erat intra sectionem evanescet, hoc est, totus circulus CR erit extra sectionem. 32. 36, & 37. 33, & 38.

Coroll. 3. Arctior igitur sive intimior est hujusmodi circuli & sectionis conicæ contactus quàm simplex quivis contactus, sed in axis vertice arctissimus: Nam si punctum C sit extra axis verticem simplici contactui C circuli CNO coincidit occursus N; In axis vero vertice his accedit & O, *i. e.* R. 32, 33. & 36, 37, 38.

Coroll. 4. In vertice axis parabolæ, determinati hyperbolæ, vel majoris ellipseos, liquet circulum GQ *i. e.* CQ maximum esse omnium sectioni inscriptibilium & eandem in eodem vertice G tangentium. Nam in vertice diametri axi infinite vicinæ, quæquè ideo ab axe non differt, circuli æquicurvi arcus extra sectionem erit infinite parvus, hoc est non differet circulus ab ipso circulo GQ; & quivis ejusmodi circulus circulo æquicurvo major ex utraque contactûs parte erit extra sectionem. Pari ratione in ellipsi erit Circulus GQ minimus omnium sectioni circumscriptibilium & eandem in vertice minoris axis G tangentium. 36, 37. 38.

Coroll. 5. Liquet etiam in hoc casu rectam CQ *i. e.* GQ esse circuli diametrum. Unde sumptâ in axe GQ = parametro axis, circulus diametro GQ erit sectioni in axis vertice G æquicurvus. 36, 37, 38.

Prop.

Prop. XII. Theor. VIII.

39, 40. *Parabolam contingat utcunque* T D *in* T; *huic vero parallela* F E *occurrat sectioni in* F, E *punctis, ex quibus ad quamlibet diametrum* D A O H *ordinentur* E G, F H, *&* *ex tactu* T *recta* T O; *Si puncta* E, F *sint ex eadem parte diametri, dico duplum ordinatæ* T O *æquale esse summæ ordinatarum* F H, E G; *si ex partibus diversis, earum differentiæ.*

Ductâ diametro T I M, bisecat hæc E F in I; Acta E L parallela T M occurrat T O, F H (si opus productis) in N, L. Ob parallelas I M, E L & æquales F I, I E, æquales erunt F M, L M, T N; sed & (ob parallelas) æquales sunt L H, N O, E G, ergo $FM \pm EG = LM \pm LH = TO$ *i. e.* $FH \pm EG = 2\,TO$.

Prop. XIII. Theor. IX.

41, 42, 43, 44, 45. *Si Circulus occurrat Parabolæ in quatuor punctis* A, B, E, D, Fig. 41, 42; *Vel in tribus* A, B, Q, *quorum* Q *sit contactus,* Fig. 43, 44; *Vel in duobus tantum* Q, B, *quorum utrumvis* Q *sit contactus, & reliquum* B *intersectio,* Fig. 45; *Sintque ab his occursibus ordinatæ ad Parabolæ axem,* viz. A G, B I, E F, D H, Fig. 41, 42. A G, B I, Q O, Fig. 43, 44. *&* B I, Q O, Fig. 45. *Dico ordinatas ex unâ parte axis simul sumptas æquales esse ordinatis ex altera parte simul sumptis; Ordinata vero ex contactu, ubi tres sunt occursus,* Fig. 43, 44. *bis sumpta; ubi duo tantum,* Fig. 45. *ter sumpta intelligatur.*

41, 42. Si quatuor sint occursus; duos quoslibet A, B jungat A B, & reliquos duos D E occurrens A B si opus productæ in N: Inventis rectarum B A, D E diametris P V, Q S, in earum verticibus P, Q sectionem contingant P R, Q R concurrentes in R; erunt hæ rectis A B, D E paral-

parallelæ, eritque (per prop. 18. p. 1.) $RQq : RPq :: NE \times ND : NA \times NB$; sed (propter circulum) $NE \times ND = NA \times NB$, ergo & $RQq = RPq$ *i. e.* $RQ = RP$. Connexâ PQ & bisectâ in O, erit juncta RO ipsius diameter, quæ (ob $RP = RQ$) erit axis. Sed (per prop. præced.) in fig. 41. $BI + AG = 2PO = 2QO = FE + HD$; & fig. 42. $BI - AG = 2PO = 2QO = FE + HD$, unde $BI = FE + HD + AG$.

2. Si tres sint occursus quorum unus est contactus: Intelligantur puncta E, Q, D (quæ in prioribus figuris diversa sunt) coincidere; Coincidentque rectæ DEN, QR; similiter EF, QO, DH: Eritque fig. 43. $BI + AG = 2PO = 2QO$, *i. e.* $EF + DH$; Vel (si AG sit ex eâdem parte axis quâ QO, fig. 44.) erit $BI - AG = 2PO = 2QO$, unde $BI = 2QO + AG$ *i. e.* $EF + DH + AG$. 43, 44.

In casibus præcedentibus, si occursuum aliquis A axis vertici coincidat, evanescente AG, fit unica ordinata ex unâ parte axis æqualis duabus ex parte alterâ, vel uni ordinatæ ex contactu bis sumptæ.

3. Si duo tantum sint occursus, quorum unus Q est contactus & reliquus B intersectio (ut in casu prop. 10.) Coincident puncta A, E, Q, D, N; Estque (per præced.) $BI - QO = 2PO = 2QO$, unde $BI = 3QO$ *i. e.* $AG + EF + DH$. 45.

Prop. XIV. Theor. X.

In Parabolâ, cujus axis DAOB, *ejus vertex* A, *& quælibet contingens* TD, *occurrens axi in* D, *Sit* TO *ordinata à puncto* T *ad axim, &* TB *perpendicularis ad contingentem occurrens axi in* B; *Dico* OB *æqualem esse semiparametro axis.* 46.

Nam (ob TO perpendicularem ex angulo recto) erit $TOq = BO \times OD =$ (per prop. 2. p. 2.) $BO \times 2OA =$ (per prop. 25. p. 1.) $OA \times$ param. &

& (horum dimidia) $BO \times OA = OA \times \frac{1}{2}$ param. Unde $BO = \frac{1}{2}$ param.

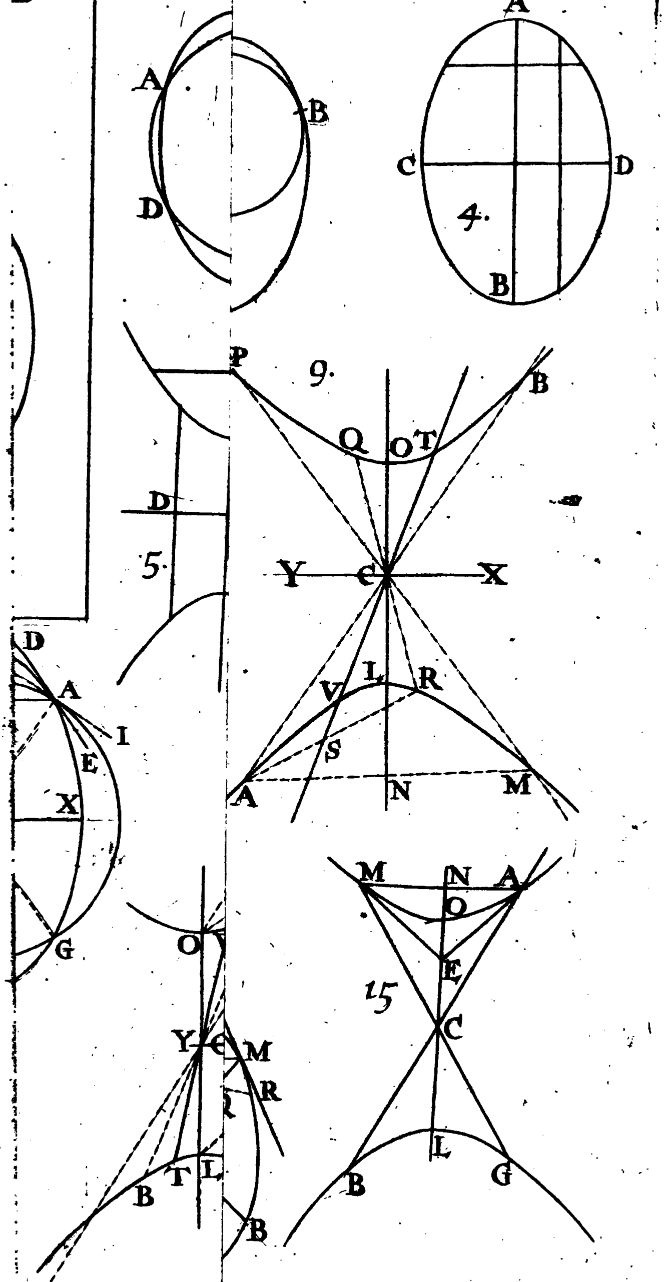
Prop. XV. Theor. XI.

47. *In Parabola, cujus axis* BC, *ejus vertex* B, *alia quævis diameter* EF, *& ex* E *ordinata ad axem recta* EC; *dico* LR *parametrum diametri* EF *superare* lr *parametrum axis quantitate quadruplâ rectæ* BC; i, e. $lr + 4BC = LR$.

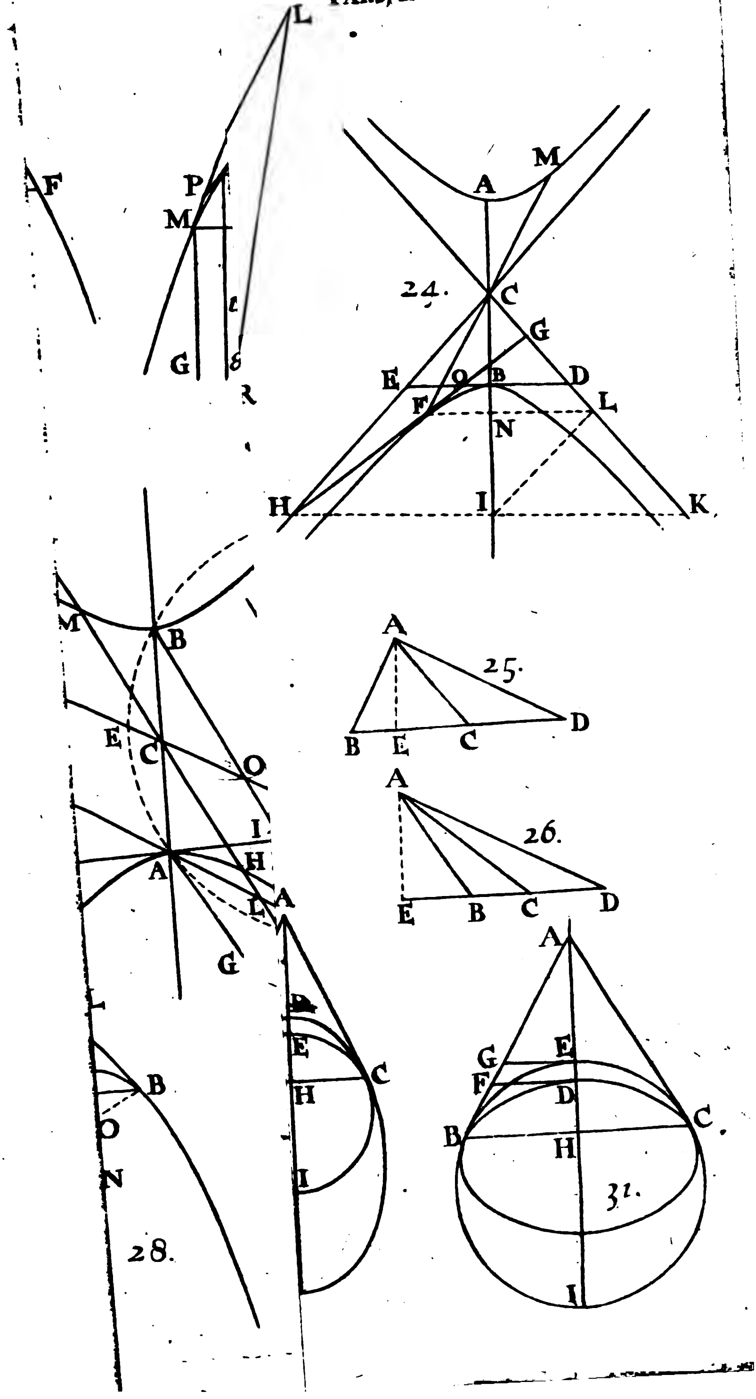
In E contingat EA occurrens axi in A, & ex B ad diametrum EF ordinetur BF; erit BF parallela EA; unde (ob BC parall. EF) erit $FE = BA =$ (per prop. 2. p. 2.) BC, & $AE = BF$; estque (propter axem) angulus ACE rectus, ergo $lr \times BC$ (per prop. 25. p. 1.) $= CEq = AEq - ACq =$ (ob $AB = BC$) $AEq - 4BCq = BFq - 4BCq = LR \times EF - 4BCq = LR \times BC - 4BCq$; unde (propter æqualem altitudinem BC) erit $lr = LR - 4BC$ vel $lr + 4BC = LR$.

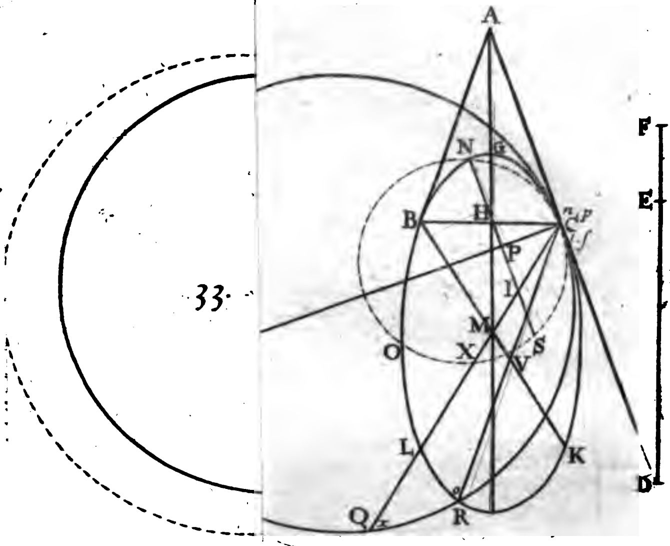
PARS

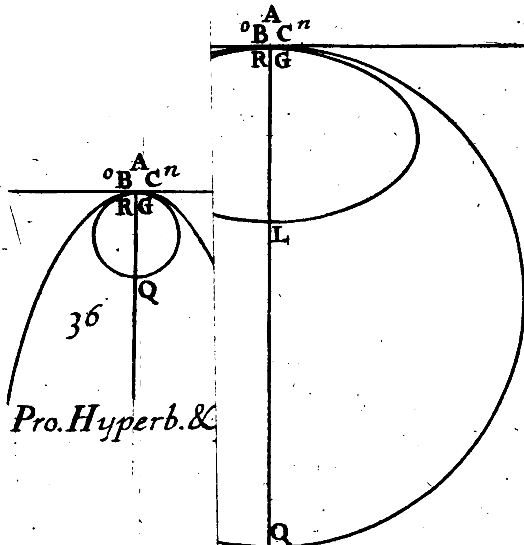
D rs, III. Tab. XIV.



MBurghers sculp.

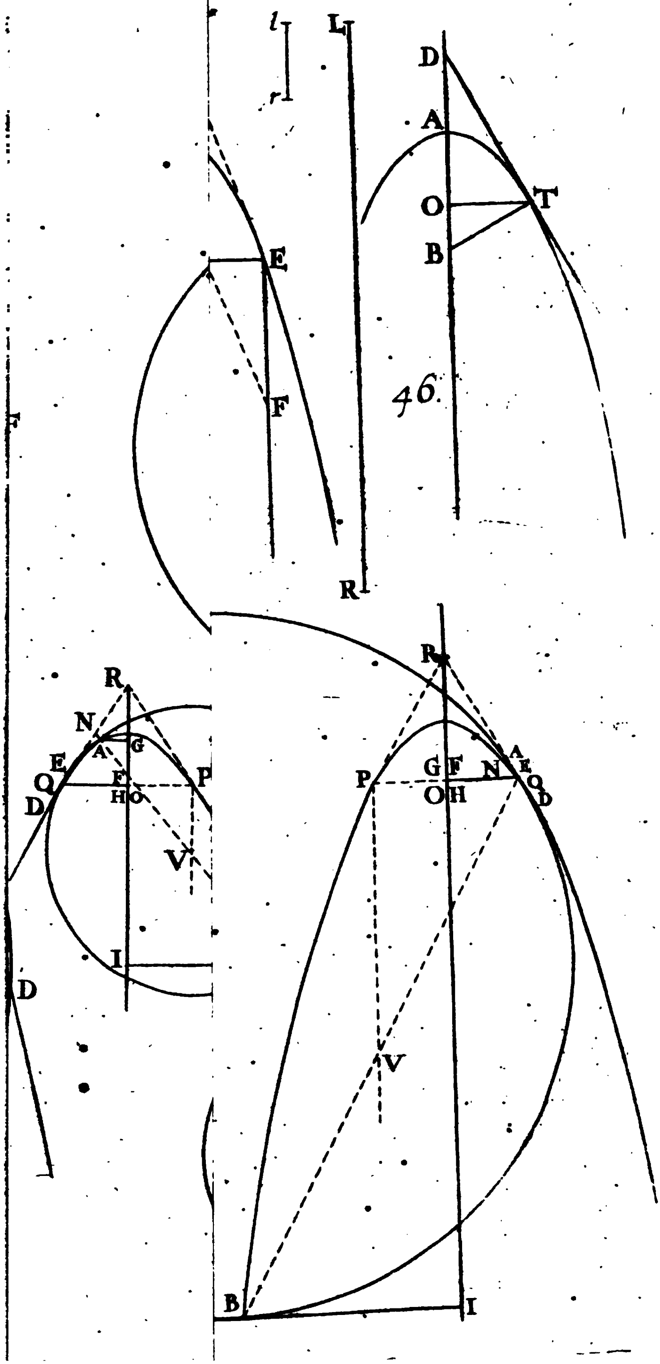

24.
25.
26.
28.
31.
A B C D E F G H I K L M N O





Pro. Hyperb. &

MBurg. sculp.


46.

PARS IV.

Prop. I. Theor. I.

SI Circulus BCDA *super axi majore Ellipseos, vel sectionum oppositarum determinato* AB, *tanquam diametro descriptus, rectam quamvis* IET *sectionem vel utramvis sectionum oppositarum utcunque in* T *tangentem secet in* C *&* D *punctis, & in his erigantur ad contingentem perpendiculares* CF, DH *occurrentes axi in* F, H; *Dico rectangula* CF × DH, BF × FA, AH × HB *sibi invicem, & quartæ parti figuræ axis, esse æqualia.* 1, 2.

Ex A & B erectæ ad axem perpendiculares contingentem secent in G, I; productæ si opus CF, DH circulo denuo occurrant in K, L; productaque denique (si opus) contingens occurrat axi in E, vel fit ei parallela. Si occurrat, erit ob sim triang.

EB : EC :: BI : CF, & propter circulum EB : EC :: ED : EA :: (ob sim. triang.) DH : AG; unde BI : CF :: DH : AG, hoc est, CF × DH = BI × AG = (per prop. 10, part. 2.) $\frac{1}{4}$ figuræ Axis.

Sed (ob chordas CK, DL ad chordam CD perpendiculares) erit CK = DL, &, cum sit BA diameter circuli, erit CF = HL, HD = FK; unde CF × DH = CF × FK = BF × FA = DH × HL = AH × HB = (prius) $\frac{1}{4}$ figuræ axis.

Si contingens sit axi parallela, quod fieri potest in Ellipsi; erunt CF, DH ad axem perpendiculares, & tam sibi invicem, quam rectis AG, BI æquales; Unde CF × DH = IB × AG = CFq = BF × FA = DHq = AH × HB.

PARS IV.

Prop. I. Theor. I.

SI Circulus B C D A *super axi majore Ellipseos, vel sectionum oppositarum determinato* A B, *tanquam diametro descriptus, rectam quamvis* I E T *sectionem vel utramvis sectionum oppositarum utcunque in* T *tangentem secet in* C *&* D *punctis, & in his erigantur ad contingentem perpendiculares* C F, D H *occurrentes axi in* F, H; *Dico rectangula* C F × D H, B F × F A, A H × H B *sibi invicem, & quartæ parti figuræ axis, esse æqualia.* 1, 2.

Ex A & B erectæ ad axem perpendiculares contingentem secent in G, I; productæ si opus C F, D H circulo denuo occurrant in K, L; productaque denique (si opus) contingens occurrat axi in E, vel sit ei parallela. Si occurrat, erit ob sim triang.

E B : E C : : B I : C F, & propter circulum E B : E C : : E D : E A : : (ob sim. triang.) D H : A G; unde B I : C F : : D H : A G, hoc est, C F × D H = B I × A G = (per prop. 10, part. 2.) $\frac{1}{4}$ figuræ Axis.

Sed (ob chordas C K, D L ad chordam C D perpendiculares) erit C K = D L, &, cum sit B A diameter circuli, erit C F = H L, H D = F K; unde C F × D H = C F × F K = B F × F A = D H × H L = A H × H B = (prius) $\frac{1}{4}$ figuræ axis.

Si contingens sit axi parallela, quod fieri potest in Ellipsi; erunt C F, D H ad axem perpendiculares, & tam sibi invicem, quam rectis A G, B I æquales; Unde C F × D H = I B × A G = C F q = B F × F A = D H q = A H × H B.

M Coroll.

Coroll. 1. Ob A H x H B = B F x F A, erit A H = B F, & B H = A F.

Coroll. 2. Cùm duobus tantùm hujusmodi punctis H, F intra Ellipsin vel utramque sectionum oppositarum convenire possit, quòd sit A H x H B & B F x F A = ¼ sq. axis; liquet eadem puncta H, F esse omnibus contingentibus communia.

Prop. II. Theor. II.

3. *In Parabola* T A, *si ab axeos* A K *vertice* A *erigatur usque ad quamlibet contingentem* T E *perpendicularis* A G, *&* *à puncto* G *erecta ad contingentem perpendicularis* G H *secet axem in* H; *Erit ubique* H A = ¼ *parametri axis.*

A tactu T ordinatâ ad axem T K, erit (per Prop. 2. Part. 2.) A E = A K, unde G A = ½ T K, & G A q = (ob ang. rect.) H A x A E = ¼ T K q = A K x ¼ Param. = A E x ¼ Param. unde H A = ¼ Param.

1, 2. Aliter, considerari potest ut casus prop. præcedentis. Nam si Hyperbola vel Ellipsis A T vertice B in infinitum abeunte mutetur in Parabolam, circulus diametro A B degenerat in lineam rectam ad axem perpendicularem, coinciduntque puncta D, G, hoc est, rectæ D H, G H; estque H A x H B = A B x ¼ param. & (ob B infinite distans) H B = A B, unde H A = ¼ Param. axis A B; idemque punctum H erit omnibus contingentibus commune.

1, 2. *Def.* Puncta H, F (Prop. 1.) Veteribus *Puncta ex comparatione*, Neotericis *FOCI* sive *UMBILICI* appellantur.

3. De puncto H in Parabolâ (Prop. 2.) silent veteres, à neotericis tamen ob affectionum similitudinem iisdem nominibus insignitur.

Corollaria ad duas præced. Propositiones.

Coroll. 1. Unicus est Parabolæ focus; Sectionum oppositarum, & Ellipseos, Bini.

Coroll

Coroll. 2. In Sectionibus oppositis & in Ellipsi, junctis I H, G H, erit angulus I H G rectus. Nam ob A H × H B = I B × A G, *i. e.* A H : A G :: I B : H B, & angulos ad B & A rectos, similia erunt triangula I B H, H A G, & Ang. B I H = G H A = compl. ang. I H B ad rectum, proindeque I H G rectus: Pari modo junctis I F, F G, erit ang. I F G rectus. In Parabolâ, cùm punctum I infinitè distet, ductâ I H parallelâ T E, erit ang. I H G manifeste rectus. 1, 2. 3.

Coroll. 3. Atque hinc in oppositis Sectionibus & Ellipsi, Circulus diametro I G transibit per utrumque focum. In parabolâ vero hujusmodi circulus (ob I G infinitam) degenerat in rectam G H. 1, 2. 3.

Coroll. 4. In omni Sectione Conicâ, quæ F E ex focorum alterutro F est ad axem ordinata, æquatur axis semiparametro. Nam in Opp. Sect. & Ellipsi sit C D axis minor, erit (per *Coroll.* 7. Prop. 23. & *Coroll.* 4. Prop. 24. p. 1.) 4, 5.

$$FEq : \left\{ \begin{matrix} DCq \\ AF \times BF \end{matrix} \right\} :: AF \times BF : BCq$$

i. e. F E : D C : B C ∺ proindeque F E = $\frac{1}{2}$ param. In parabola (ob B F = $\frac{1}{4}$ param.) erit param. × $\frac{1}{4}$ param. = F E q; unde F E = $\frac{1}{2}$ param. 6.

Coroll. 5. In Ellipsi, si C D sit semiaxis minor, erit connexa D F vel D H æqualis semiaxi majori; Nam F Dq = C D q + F C q = (propter *Coroll.* 4. Prop. 24. p. 1.) B F × F A + F C q = B C q, unde B C = F D. 4.

In oppositis Sectionibus, vel hyperbolâ, si contingens in vertice B occurrat asymptoto in G, erit C G = C F; vel si sit C D semiaxis secundus ipsi C B conjugatus & connectatur D B, erit D B = C F. Nam ob (C D = B G) erit C G = D B; estque D B q = C D q + C B q = (propter idem *Coroll.* 4.) A F × F B + C B q = C F q; unde D B = C F. 5.

Coroll. 6. Hinc in Ellipsi circulus centro D, intervallo C B; In Hyperbola circulus centro C, intervallo D B vel C G, transibit per utrumque focum. 4, 5.

Coroll. 7. Si Ellipseos axes sint æquales, hoc est si 4.

Sectio sit circulus, uterque focus centro coincidit; nam $BF \times FA = CDq =$ (in hoc casu) BCq, unde coincidunt F, C, H.

7. *Coroll.* 8. Si Hyperbola sit æquilatera, erit AF : BC : BF ∺ nam $AF \times BF = \frac{1}{4}$ param $\times AB =$ (in hoc casu, per *Coroll.* 1. Prop. 24.) BCq.

7. *Coroll.* 9. In Hyperbolæ æquilateræ utrâvis asympto- to, factâ $CG = CB$, & per G ductâ GF alteri asymptoto parallelâ, hoc est, ad CG perpendiculari, Hæc per focum transibit. Nam ob utrumque ang. GCF, GFC semirectum, erit $GF = GC =$ (ex construct.) $CB = CD$, ergo $CF = DB$.

3. *Coroll.* 10. In Parabolâ, à focó H ad cujuslibet contingentis TE medium punctum G ducta recta HG est ad contingentem perpendicularis. Nam non differt à perpendiculari à puncto G erectâ.

Prop. III. Theor. III.

8, 9. *In Hyperbolâ vel Sectionibus oppositis, & in Ellipsi, si ab utroque foco* F, H *ad quodvis sectionis punctum* T, *ubi recta* CTE *eandem contingit, agantur binæ rectæ* FT, HT; *Dico Angulum* $FTC = HTE$.

Occurrat primo CTE axi in E. Stantibus circulo & rectis CF, DH, ut prius.

8. In Hyperbolâ vel Sect. Opp. ordinatâ ad axem rectâ TK, per E ducatur XEY parallela TK *i. e.* ad BA perpendicularis secans circulum in X, Y; Cum sit propter sectionem (per *Coroll.* 1. Prop. 1. Part. 2.) BK : KA :: BE : EA, contingentes circulum in X, Y coibunt super circuli diametro BA (per *Coroll.* 17. Prop. 20. p. 1. & per Prop. 1. p. 2.) in puncto K, unde (per Prop. 3. p. 2.) CT : TD :: CE : ED.

9. In Ellipsi, ordinatâ ad axem TK, & productâ ad circulum in X, Y; cum sit BK : KA :: BE : EA, contingentes circulum in X, Y coibunt in E, Unde (per

8, 9. Prop. 1. p. 2.) erit in Ellipsi (uti prius in Hyperbolâ)

CT:

CT : TD : : CE : ED : : (ob sim. triang.) CF : DH; ergo ob æquales angulos (rectos scilicet) FGT, HDT, & proportionalia latera, erunt triangula CTF, DTH similia, Undè Ang. FTC = HTE.

Si (in Ellipsi) fit CTD parallela AB, res per se manifesta est. *Supple fig. hujus casus.*

Prop. IV. Theor. IV.

Si Parabolam contingat utcunque CTG *in* T, *tactum vero* T *& focum* H *jungat* TH, *& per* T *agatur* FT *axi* HE *parallela*; *Dico Ang.* FTC = HTE. 10.

Manentibus quæ in Prop. 2. ob KA = AE, erit TG = GE, unde (ob ang. TGH rectum) similia & æqualia erunt triangula GTH, HEG; ergo Ang. HEG, *i. e.* FTC = HTG.

Aliter, Si Ellipsis, vel Hyperbola (foco F in infinitum abeunte) convertatur in parabolam, fiet FT parallela HE; estque semper Ang. HTE = FTC. 8, 9, 10.

Coroll. 1. Si duæ parabolam contingentes BE, DE concurrant in E, connexis DH, HB erit angulus ad focum DHB = 2 DEB. Tangentes (earum unâ productâ) occurrant axi in C, I, fiatque EG axi parallela; Ob ang. HDI = HID & HBC = HCB, erit angulus DHL = 2 DIH = 2 DEG, & LHB = 2 BCH = 2 BEG; Unde DHB = 2 DEB. Si puncta H, E sint ad diversas partes rectæ conjungentis tactus D, B; ostendetur angulum ad focum æqualem esse duplo complementi Anguli DEB. 11.

Coroll. 2. Contingentes in extremis B, D rectæ cujusvis BHD per parabolæ focum ductæ, concurrentes constituunt angulum BED rectum. Nam ostendetur ut in priore *Coroll.* Ang. BHL + DHL, *i. e.* 2. Rect. = 2 BED. 12.

Prop. V. Theor. V.

In Hyperbolâ vel Sectionibus oppositis & Ellipsi, si ab utroque foco H, F *ad quodvis Sectionis punctum* T 8, 9.

ducantur

ducantur rectæ H T, F T; *Dico in Ellipsi summam ipsarum* H T, F T, *in Hyperbolâ earundem differentiam æquari axi* A B.

8, 9. Manentibus quæ in Prop. 3. Sit centrum O, & connectatur O D, vel O C, *ex:gr*: O D, rectaque H D producta occurrat F T productæ (si opus) in S. Propter Ang. H T D = (per Prop. 3.) S T D, & ang. T D H rectum, erit S T = T H & S D = D H; estque in Ellipsi F S = F T + T H, in Hyperbola F S = F T − T H.

Propter F H & S H bisectas in O & D, erit O D parallela F S, & F S = 2 O D = (ob circulum) A B.

Coroll. 1. Si ab utrovis foco Hyperbolæ vel Sect. Opp. sive Ellipseos ad cujuslibet contingentis T E tactum T ducatur F T, & à centro Sectionis O ad contingentem usque agatur O D ipsi F T parallela; erit O D æqualis semiaxi O B, vel O A. Incidit enim in punctum D, ubi contingens T D circulo C D A occurrit.

Coroll. 2. Rectang. F T x T H æquale est $\frac{1}{4}$ fig. diametri per T. Nam ductis A G, B I (ut in Prop. 1.) circulus diametro I G, qui per (*Coroll.* 3. Prop. 2.) transit per F, H, propter ang. T D H rectum & D H = D S, transibit etiam per S; unde (& ob S T = T H) erit F T x T H = F T x T S = I T x T G = (per *Coroll.* 2. Prop. 10. p. 2.) $\frac{1}{4}$ fig. diametri per T.

Scholium. Focorum altero, *ex. gr.* F, in infinitum migrante & sectione in Parabolam mutatâ, tam $\frac{1}{4}$ fig. diametri per T, quam rectang. F T x T H fiunt magnitudinis infinitæ; evaditque T H = $\frac{1}{4}$ param. diametri per T, ut deinceps monstrabimus.

Nota. S D = D H; & F S = B A.

Prop. VI. Theor. VI.

13, 14. *Iisdem positis; In Hyperbolâ vel sect. opp. & Ellipsi, si à tactu* T *erecta ad contingentem perpendicularis* T V *secet axim in* V, *& ab* V *demittantur ad* F T, H T (*si opus productas*) *perpendiculares* V X, V Y; *Dico* T X, T Y *esse sibi invicem, & axis semiparametro æquales.*

Idem

Idem erit in Parabolâ, si ab hujusmodi puncto V *demittantur perpendiculares ad rectam* T H *unicum sectionis focum* H *& tactum* T *conjungentem, & ad rectam* T F *per tactum ductam axi parallelam.* 15.

Propter angulum $CTF = DTH$ (per prop. 3.) & V T ad C T perpendicularem, erit ang. $VTY = VTX$, & (ob angulos ad X & Y rectos, & commune latus T V) erunt triangula V T X, V T Y similia, & æqualia; unde $TX = TY$: Rursum (ob ang. C T V rectum) erit T V parallela C F, & triangula F T V, F S H similia.

Item (ob angulum T X V rectum, & $TV \parallel FC$) Triangula T F C, V T X similia sunt: Unde

$FS : SH :: FT : TV$ &

$TX : FC :: TV : FT$, Ductisque &c.

$FS \times TX : SH \times FC :: FT \times TV : FT \times TV$, Hoc est, $FS \times TX = SH \times FC =$ (ex notâ præced.) $2DH \times FC =$ (per Prop. 1.) $\frac{1}{2}$ param. $\times AB$; sed F S (per notam præced.) $= AB$, ergo $TX = \frac{1}{2}$ param. $= TY$.

In Parabolâ, Ordinatâ ad axem T L, erit (ut in priore parte) triang. $VTY =$ & sim. $VTX =$ & sim. V T L, Unde $YT = TX = LV =$ (per Prop. 14. p. 3.) $\frac{1}{2}$ param. 15.

Hoc etiam in Parabolâ vel inde liquet, quòd Ellipseos vel Hyperbolæ foco altero F in infinitum abeunte, & sectione in Parabolam mutatâ, fiat T F axi parallela. 13, 14.

Coroll. In Hyperbolâ vel sect. opp. & Ellipsi; Cùm sit ob sim. triang. $TY : HD :: TV : TH$ &

$\left.\begin{matrix} TX \\ TY \end{matrix}\right\} : FC :: TV : TF$, Erit ductis &c. 13, 14.

$TYq : HD \times FC :: TVq : TH \times TF$;

Hoc est, T V q est ubique ad $\frac{1}{4}$ fig. diametri per T, in constanti ratione $\frac{1}{4}$ quad. param. axis, ad $\frac{1}{4}$ fig. axis. Ideoque T V est ubique ad semidiametrum semidiametro per T conjugatam, in constanti ratione semiparametri axis majoris vel determinati ad semiaxem huic conjugatum; nempe prioris subduplicatâ.

Prop.

Prop. VII. Theor. VII.

16, 17. *In Hyperbolâ sive sect. opp. & Ellipsi, si ex cujuslibet contingentis* GT *tactu* T *erecta ad eandem perpendicularis* TV *secet axim in* V, *junctis* FT, TH, *ut in praecedentibus; Dico in Hyperbolâ sive sect. opp.* VH×VF−VTq, *in Ellipsi* VH×VF+VTq =HT×TF=¼ *fig. diametri per* T.

Ductis AG, BI, ut in praecedentibus, & diametro GI descripto circulo, idem (per *Coroll.* 3. Prop. 2.) per focos H, F transibit: Per V & circuli centrum M ducta VM occurrat circulo in O, P; Erit (propter circulum, & ang. VTG rectum) in sect. opp. VO× VP+MOq=VH×VF+MOq=MVq=VTq +MTq=VTq+TG×TI+$\left\{\begin{matrix}GMq\\MOq\end{matrix}\right\}$ Unde VH ×VF−VTq=TG×TI=¼ fig. diam. per T= (per *Coroll.* 2. Prop. 5.) TH×TF.

In Ellipsi, MOq−VO×VP=MOq−VH×VF =MVq=VTq+MTq=VTq+$\left\{\begin{matrix}MGq\\MOq\end{matrix}\right\}$−GT×TI; Unde erit VH×VF+VTq=TG×TI=¼ fig. diam.=TH×TF.

Coroll. 1. Hinc, & per lemma 2.p.1. in sect. opp. AV× VB−AH×HB−VTq, in Ellipsi AV×VB−AH×HB+VTq=TH×TF.

Coroll. 2. Cum sit per *coroll.* prop. 6.

13, 14. 16, 17. TYq:HD×FC::TVq:$\left\{\begin{matrix}\text{TH×TF}\\ \text{in Hyp. VH×VF−TVq}\\ \text{in Ellip. VH×VF+TVq}\end{matrix}\right\}$ erit comp. vel div. HD×FC±TYq:TYq::VH× VF::TVq. Hoc est, HV×VF est ad TVq in constanti ratione ¼ fig. axis in Hyp. +, in Ellips. −¼ quad. param. axis, ad ¼ quad. param. axis; Vel (propter communem altitudinem *viz.* semiparam. axis) in ratione semiaxis ± ejus semiparametro, ad ipsam semiparametrum.

Prop.

Prop. VIII. Theor. VIII.

In omni Sectione Conicâ, & in Sectionibus oppositis, si per focum F *agatur recta linea* P F L *sectioni, vel sectionibus oppositis occurrens in* P, L *punctis, in quibus sectionem, vel sectiones oppositas contingant* P E, L E *concurrentes in* E, *sive forte inter se parallelæ; Connexâ* F E, *[vel, si contingentes sint parallelæ, ductâ* F E *his parallelâ,] dico ang.* E F P *rectum esse.* 18, 19. Suppl. figuræ Hyperb. & Sect. opp.

Invento axe C F A, in utrovis ejus extremo [vel unico in Parabolâ] A, erigatur ad eundem perpendicularis A D (*i. e.* contingens) cui producta (si opus) L P occurrat in D, vel sit ei parallela.

Si occurrat. A puncto D ducatur (per prop. 4. p. 2.) contingens D I N; occurret hæc axi in N, vel erit ei parallela.

Tactus A, I jungat recta A I, secans L P in M, hæc producta (per Prop. 7. p. 2.) transibit per E, rectaque A E in punctis A, M, I, E (per Prop. 1. p. 2.) harmonicè dividitur.

Porro in Hyperbolâ, Sectionibus oppositis, & Ellipsi, in altero axis extremo C sit contingens C G, occurrens D I N in G, & connectatur E G.

Si quidem recta D I G N occurrat axi in N, (quod semper fit, unico casu in Ellipsi excepto,) eadem (per *Coroll.* Prop. 9. p. 2.) harmonicè dividitur in D, I, G, N; aliàs bifariàm tantùm dividitur à punctis D, I, G. Est verò punctum I utrique rectæ D I G N, A M I E commune, & reliqua divisionum puncta debito ordine (juxta Lem. 9, vel 10. p. 2.) jungunt rectæ D M, E G, A N, [aut saltem erit A N parallela D I,] unde (per idem Lem. 9, vel 10.) rectæ D M, E G, A N in unum punctum coeunt, quod erit necessariò punctum F, in quod rectæ P L *i. e.* D M, & A C *i. e.* A N priùs coibant, hoc est, recta E G rectæ E F coincidit;

unde angulus E F P, *i. e.* G F D (per *Coroll.* 2. prop. 2.) erit rectus.

19. In Parabolâ, I D N semper occurrit axi, & bisecatur in D, estque punctum I utrique rectæ IDN, ~~IMAE~~ commune; unde rectæ D M, N A quæ utriusque rectæ puncta debito ordine conjungunt, & recta E H à aliquo puncto E ducta parallela I D N, coibunt (per Lem. 10. p. 2.) in unum idemque punctum F, in quod scilicet rectæ N A & P L *i. e.* D M primò coibant; hoc est, coincidit E H ipsi E F; estque (ob rectas parallelas) ang. E F D *i.e*, E F P=I D F, qui (per *Coroll.* 10. Prop. 2.) est rectus.

In Ellipsi, & opp. Sect. si P E, L E sint parallelæ, recta P L axi coincidit.

Si P L sit parallela A D, erit ad axem ordinata, rectaque E F axi coincidet; estque in utroque casu propositio per se manifesta.

Coroll. In Hyperbolâ vel sect. opp. punctorum L, P altero *ex. gr.* P in infinitum abeunte, contingens P E fit asymptotos, evaditque ipsi L F parallela; rectaque E F ab occursu contingentis L E cum eâdem asymptoto ad focum ducta erit tam ad asymptoton, quàm ad rectam L F perpendicularis. Vel conversim; Ab E erecta ad asymptoton perpendicularis per focum transibit.

Prop. IX. Theor. IX.

20, 21. *Supple figuram sectionum opp.*

In Hyperbolâ, Sectionibus Opp. & Ellipsi, sint foci A, B, *& axis major vel determinatus* G H; *in quo (producto in Ellipsi) sumatur punctum* C, *ut sit* A B : G H :: B H : H C; *& à puncto* C *erectâ ad axem perpendiculari* C E, *sumatur quodlibet in Sectione vel utrâvis sectionum opp. punctum* K, *à quo ducta* K E *axi parallela occurrat* C E *in* E, *& connectatur* B K; *Dico* A B : G H :: K B : K E.

Producta K B (si opus) occurrat denuò sectioni, [vel sectioni cujus est focus B, si punctum K sit ad sectionem oppo-

oppositam,] in I. Propter $AB:GH::BH:HC$, erit alternando & componendo in Ellipsi, dividendo in Hyperbolâ & sectionibus oppositis,

$$\left.\begin{matrix} AB \pm BH \\ GB \end{matrix}\right\}:BH::\left\{\begin{matrix} GH \pm HC \\ GC \end{matrix}\right\}:HC$$

Erit itaque (per prop. 1, & 6. p. 2.) recta CE illa in cujus punctum aliquod D coeunt rectæ KD, ID sectionem vel sectiones oppositas in punctis K, I tangentes; ductâque DB, erit (per prop. præced.) ang. DBK rectus, & ob angulum DEK pariter rectum, circulus diametro KD per puncta E, B transibit.

Ducta AK (& si opus producta) secet circulum in F, & connectantur FE, FB.

Propter ang. FKD (per prop. 3.) $= BKD$, erit arcus $KF = KB$, chordaque $KF = KB$, ac proinde (per prop. 5.) $AF = GH$.

Porro (ob rectas parallelas) erit angulus $FKE = FAB$; & (ob $FK = KB$) erit in Ellipsi & opp. sect. ang. $FEK = KFB$, in hyperbolâ vero ang. $FEK =$ compl. $KBF =$ (ob arcum $KF = KB$) complemento KFB, *i.e.* BFA; Unde in omnibus triangula FEK, FBA similia sunt; unde

$$AB:\left\{\begin{matrix} AF \\ GH \end{matrix}\right\}::\left\{\begin{matrix} FK \\ KB \end{matrix}\right\}:KE.$$

Coroll. In Hyperbolâ vel sect. opp. ductâ KN asymptoto LM parallelâ, occurrente CE in N, erit KN 22.
$= KB$. Nam ductâ HL parallelâ CE occurrente asymptoto in L, erit (per *Coroll.* 5. prop. 2.) $ML = MB$; & ob sim. triang.

$$\left\{\begin{matrix} ML \\ MB \end{matrix}\right\}:MH::KN:KE::\left\{\begin{matrix} 2MB \\ AB \end{matrix}\right\}:\left\{\begin{matrix} 2MH \\ GH \end{matrix}\right\}::KB:KE;$$

Unde $KN = KB$.

Prop. X. Theor. X.

Sit Parabola HK, *cujus focus* B *& axis* BH, *in quo* 23.
sumatur extra sectionem $HC = HB$; *in puncto* C *erectâ ad axem perpendiculari* CE, *sumatur quodvis*

in sectione punctum K, *à quo ducta* KE *axi parallela occurrat* CE *in* E, *& connectatur* BK; *dico* BK = KE.

Ductâ contingente MKG, & ordinatâ KO; *ob* ang. MKL (per prop. 4.) = GKB = KGB, *erit* GB = BK: Sed (per prop. 2. p. 2.) GH = HO, unde additis æqualibus HB, CH, erit GB *i. e.* KB = CO = (ob rectas parallelas) KE.

20, 21. Aliter, considerari potest ut casus præcedentis; nam si Hyperbola vel Ellipsis, foco A in infinitum migrante, mutetur in Parabolam, fit AB = GH & BH = HC, unde BK = KE.

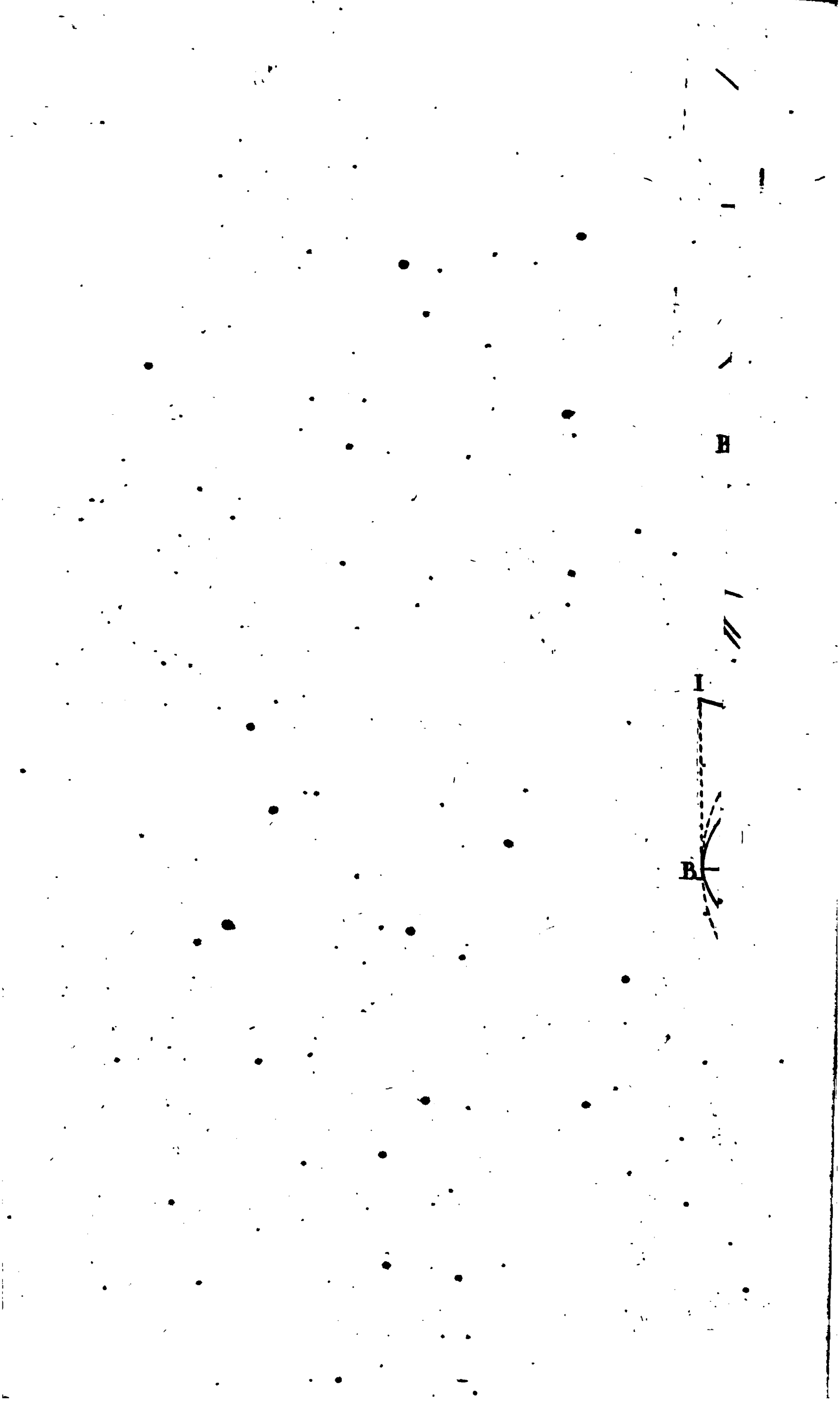
23. *Coroll.* Cum sit (per prop. 15. p. 3.) HO quarta pars excessûs parametri diametri KL supra parametrum axis, & CH = HB (per prop. 2.) sit quarta pars parametri axis; Liquet KB sive KE = CO æquari quartæ parti parametri diametri KL.

Prop. XI. Theor. XI.

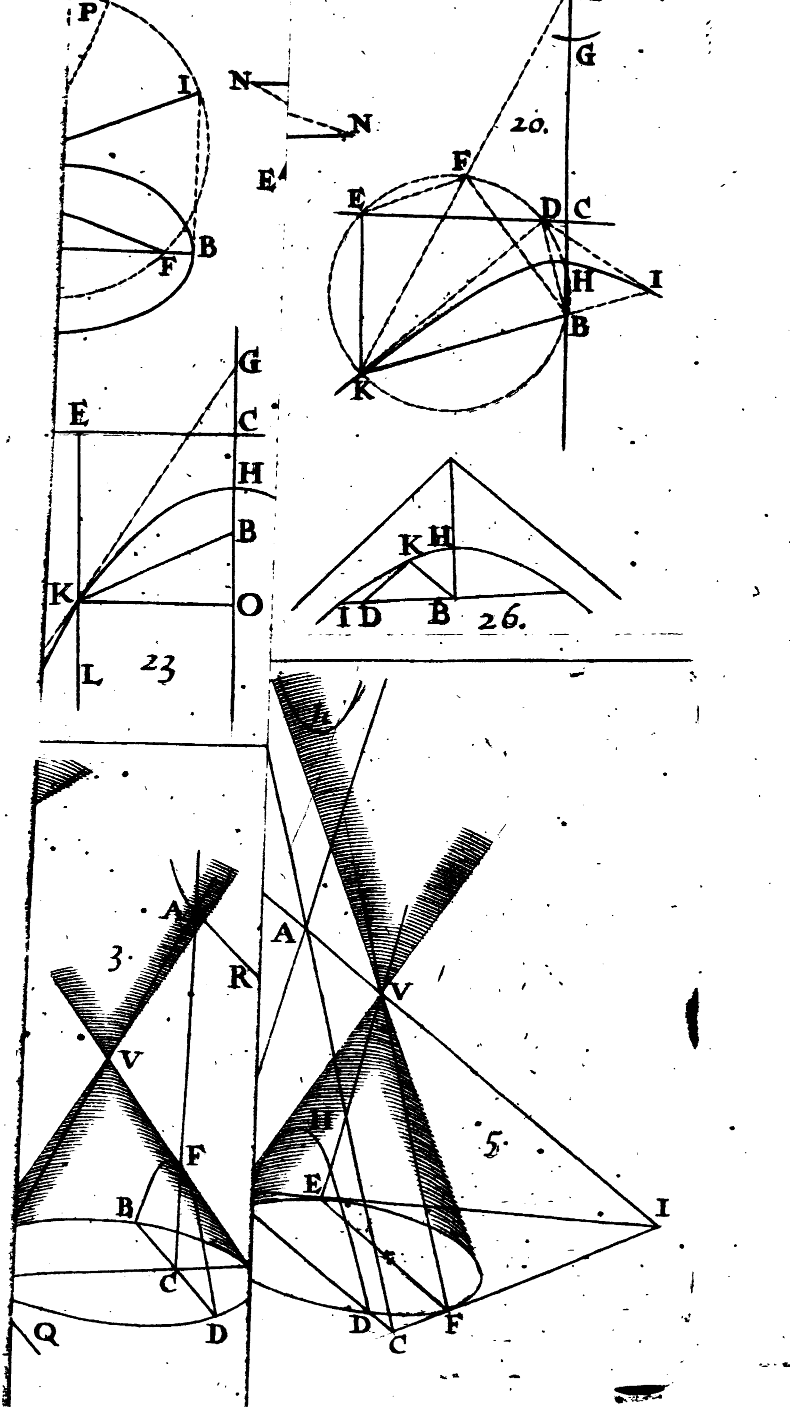
24, 25. *Sit Parabolæ vel Hyperbolæ focus* B, *& per* B *ad axem ordinata* BI; *Sumptoque in sectione vel utrâvis sect. opp. puncto quovis* K, *agatur* KD, *in Parabolâ axi, in hyperbolâ verò sive sect. opp. utrivis asymptoto parallela, occurrens* BI (*si opus producta*) *in* D, *& connectatur* BK; *Si punctum* D *cadat intra sectionem, Dico ipsarum* BK, KD *summam, Si extra, earundem differentiam, æqualem esse semiparametro axis.*

Sit recta CE eadem quæ in præcedentibus, cui occurrant KD (si opus producta) in E, IL verò ducta ipsi KD parallela in L. Estque (per *Coroll.* 4. prop. 2.) BI = Semiparametro axis = (per præced. vel *coroll.* prop. 9.) IL = (ob rectas parallelas) DE, = KE ± KD vel KD − KE, = (per præced. vel *coroll.* prop. 9.) BK ± KD vel KD − BK.

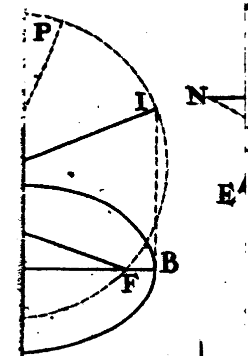
Coroll.

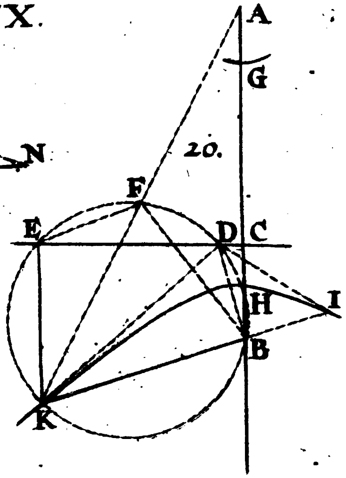

B
I
B

XIX.

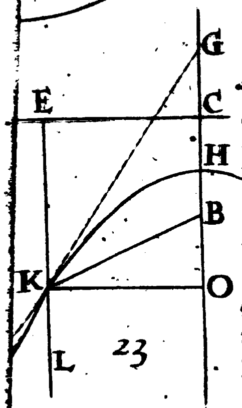


P
L
N
N
E
F
B
A
G
20.
F
E
D C
H
I
B
K
G
E
C
H
B
K
O
L
23
K H
I D
B
26.
h
A
3.
R
A
V
V
F
H
B
E
I
5.
C
D
Q
D
C
F

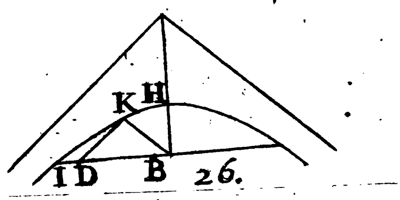




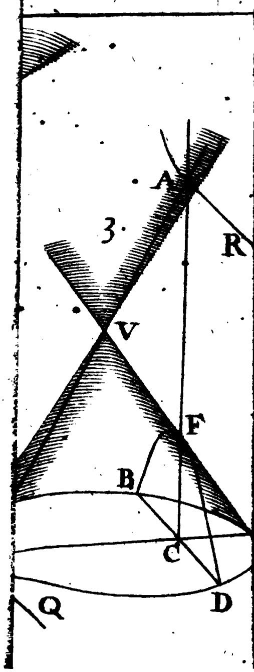
20.



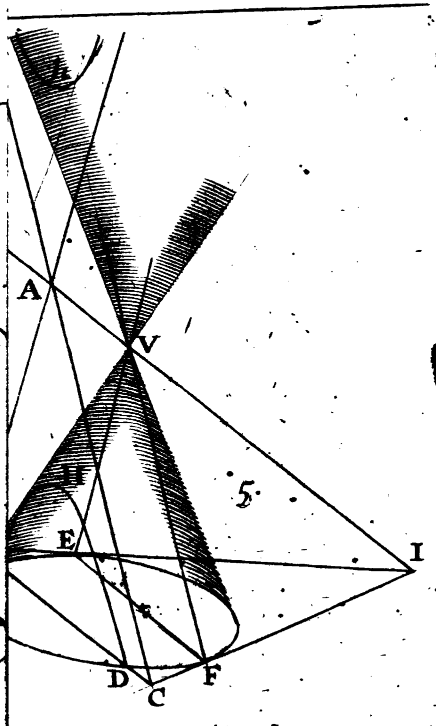
23



26.



3.



5.

Corol. Si BK sit alteri asymptoto parallela, erit triang. BKD isosceles; & ob BK + KD = BI & BK = KD, erit BK = ½ BI = ¼ parametri axis. 26.

Scholium. Inter Parabolæ diametros & rectas hyperbolæ [vel sect. opp.] asymptoto parallallelas, maxima est (ut passim observare licuit) affinitas atque analogia; cujus rei modò ostensæ proprietates sunt insignia præ aliis exempla.

PARS

PARS V.

Propositio I. Probl. I.

1. *In plano quovis* A C D, *datâ positione rectâ* A C F *pro diametro sectionis conicæ* [*vel sect. opp.*] *quæ in hyp. vel. sect. opp. sit determinata, cum utrovis, vel unico, ejus vertice* A, *& duabus ordinatis* D C, G F, *ad eandem in quovis angulo* A C D *inclinatis*;

2, 3. *Vel datâ (ut priùs) diametro* A C F, *cum utroque vertice* A, F, *& unicâ ordinatâ* C D, *ad eandem in angulo* A C D *inclinatâ*;

4. *Vel denique diametro* A C, *cum uno vertice* A, *& unicâ ordinatâ* C D, *ad diametrum* A C *sub angulo* A C D *inclinatâ, & rectâ* D T *pro contingente in ejus extremo* D;

Hujusmodi sectionem in superficie conicâ exhibere.

Oportet autem nec puncta G, D, *nec rectam* D T, *cum dato vertice* A *in directum jacere.*

1. 1. PRoductis D C, G F in B, E, ut sit C B = C D, E F = F G, Per parallelas B D, E G transeant duo plana invicem parallela B C K, E F I, ad planum A C D quomodolibet inclinata; In quorum utrovis, *ex.gr.* in illo per B C D, super B D tanquàm chordâ statuatur circulus B K D L; ex C erectâ in eodem plano ad B D perpendiculari L C K occurrente circulo in L, K, per rectas A C F, L C K transeat planum secans alterum ex planis parallelis in F I, quæ proinde erit ad L C K parallela.

Connexâ A K vel A L *ex.gr.* A K, hæc (producta si opus) secet F I in I; deinde in plano E F I per puncta E, G, I describatur circulus secans I F in H; connexa denique

denique H L secet AK (utpote in eodem plano sitam) in V.

Superficiei conicæ, vertice V, basi circulo B K D L vel H E I G, genitæ, cum plano A C D intersectio, *viz.* E B A D G, est sectio proposita.

Ob rectas B D, E G, & L K, H I parallelas, & ang. B C K (ex constr.) rectum, erunt L K, H I circulorum diametri. Bisectâ L K in N, ductâque V N (& si opus productâ,) bisecabit hæc H I in M, eritque V N M coni axis utrâvis basi, vertice V geniti.

Per V N M transeat planum secans circuli L B K D planum in N P, planum vero circuli H E I G in M O, eorumque peripherias in P, O, & connectantur P V, O P.

Erunt (ob plana parallela) P N, O M parallelæ, & propterea quòd N, M sint circulorum centra, erit N K = N P, M I = M O, & ob sim. triang.

$$VN : VM :: \left\{ \begin{matrix} NK \\ NP \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} MI \\ MO \end{matrix} \right\} \text{ unde rectæ}$$

V P, P O in directum jacent, & sic ubique; Una itaque eademque est superficies conica sive basi L B K D, sive H E I G, & vertice V genita. Transit verò per puncta G, D, A, B, E, bisecatque A C F rectas B D, E G, in C, F, unde (per *Coroll.* 10. prop. 20. p. 1.) est harum diameter; ideoque sectio G D A B E est sectio proposita.

2. Si detur unica ordinata C D cum utroque vertice A, F: Factâ C B = C D, ductoque circulo L B K D, & rectâ L C K, ut in priore casu; In plano per A C F, L C K connexa L F occurrat connexæ A K in V, eritque superficiei conicæ vertice V, basi L B K D, genitæ, cum plano A C D intersectio, *viz.* F B A D sectio proposita. 2, 3.

Transit enim per puncta B, A, D, F; Si vero planum secundùm rectam V K superficiem contingat, secans planum circuli in K Q, planum vero sectionis in A R, erit ang. C K Q rectus, adeoque K Q parallela C D, quæ (per lemma 1. p. 1.) est parallela A R; tangit verò

verò A R sectionem in A, bisecatque A C rectam B D in C, unde (per *coroll.* 11. prop. 20.) est rectæ B C D atque huic parallelarum diameter; ideóque F B A D sectio proposita.

4. 3. Si, dato uno tantum vertice A, detur unica ordinata D C, cum rectâ D T pro contingente in ejus extremo: Ducto circulo L B K D & rectâ L C K, ut priùs, circulum contingat D X in D; Per D T & D X transeat planum secans planum per A C, L C K in rectâ X T (nisi forte fuerit planum T D X plano A C K parallelum) cui occurrat connexa A K in V; Erit superficiei conicæ vertice V, basi L B K D, genitæ, cum plano A C D intersectio, *viz.* B A D, sectio proposita.

Transit enim per B, A, D; Et quoniam, connexâ V D, planum V D X tangit superficiem, recta D T (quæ est in plano contingente) tanget sectionem: Quòd verò recta A C sit ordinatæ B C D, atque huic parallelarum, diameter, patet ut in priore casu.

Supple hos casus. Si in 1^mo^ vel 3^tio^ casu datus unus vertex A, in 2^do^ è duobus alteruter A, infinitè distet, (non existente in 1^mo^ connexâ G D, in 3^tio^ rectâ D T parallelâ A C) hoc est, si reliquis datis, exhibenda sit sectio quæ sit Parabola; Ductâ rectâ A K parallelâ A C F, manet reliqua constructio: Erit verò (ob A K parallelam A C) planum sectionis plano secundùm V A K superficiem tangenti parallelum, ideoque sectio erit Parabola. In cæteris demonstratio haud erit diversa.

Si punctum V infinitè distet, hoc est, si rectæ H L, A K in primo casu, F L, A K in secundo, vel in tertio K A, T X, parallelæ sint, fit superficies cylindrica, quæ est superficies conica cujus vertex infinitè distat: sed mutatâ planorum ad invicem inclinatione, manente circulo; vel assumpto majoris minorisve diametri circulo, manente planorum inclinatione, vertex V ad distantiam finitam accedet. Idem intellige si in tertio casu planum T D X sit plano A C K parallelum.

Si puncta G, D in primo casu, vel recta D T in tertio,

tio, & datus vertex A in directum jacere intelligantur, Coincident puncta A, V, & loco sectionis conicæ prodibunt duæ rectæ, *i. e.* sectio per verticem.

Si simul datus vertex A infinitè distet, & vel connexa G D in primo casu, vel recta D T in tertio, fit datæ diametro parallela, abeunte coni vertice in infinitum, Parabola in duas rectas diametro parallelas, & ab eâdem utrinque æqualiter distantes abibit.

Coroll. Cùm in quovis hujus propositionis casu, tam 1, 2,
circulus L B K D, modò recta B D eidem inscribi possit, 3, 4.
quàm plani ejusdem circuli ad planum A C D inclinatio pro libitu assumatur; His quomodolibet variatis, orientur superficies conicæ numero infinitæ, quarum quævis proposito satisfacit.

Prop. II. Probl. II.

Datis in plano duabus rectis non parallelis A G, A C, 5.
pro Hyperbolæ [vel sect. opp.] asymptotis, & extra easdem puncto B *per quod sectio transeat, Hujusmodi sectionem in superficie conicâ exhibere.*

Per B ductâ G B C datas rectas in G, C secante, factâque C D = B G, super B D tanquam chordâ statuatur cujusvis magnitudinis Circulus B E F D, in plano scilicet ad planum A G C quomodolibet inclinato: Ex punctis G, C circulum contingant G E, C F; junctisque tactibus E, F, erit E F parallela G C: Nam (ob G B = D C, & propter circulum) G D x G B = G E q = C D x C B = C F q, *i. e.* C F = G E; unde, si G E, C F parallelæ sint, erit E F parallela G C; sin concurrant in I, erit (ob circ.) etiam E I = F I, unde iterùm erit E F parallela G C.

Per E F igitur transeat planum plano A G C parallelum, secans plana per A C, C F & A G, G E in rectis F V, E V: Si vertice V, basi circulo B E F D, generetur conica superficies, erit ejus intersectio cum plano G A C, *viz.* B H D, sectio proposita.

O Nam

Nam, cùm sectio fiat à plano G A C plano per verticem E V F superficiem secante parallelo, erit Hyperbola [vel sect. opp.] Transit etiam per B; Tangunt vero plana V F C, V E G superficiem conicam; proindeque erunt A G, A C (per prop. 13. p. 1.) sectionis asymptoti.

5. *Coroll.* Pro variâ circuli B E F D magnitudine, plani ejusdem circuli ad planum G A C inclinatione, vel rectæ G B C positione, orientur superficies conicæ numero infinitæ, quarum quævis proposito satisfacit.

Prop. III. Probl. III.

6, 7, 8. *Datis in plano quinque punctis* P, Q, R, S, T, (*quorum unum, vel duo quævis, secundum datas directiones à reliquis infinite distare possunt,*) *per quæ sectionem conicam* [*vel sect. opp.*] *transire oportet; Hujusmodi sectionem in superficie conicâ exhibere.*

Oportet autem ex datis punctis nulla tria in directum jacere; Nec (*quod idem esset*) *punctum aliquod secundum rectæ duo alia conjungentis directionem infinite distare.*

Connexis *ex. gr.* Q P, R P, [aut ductis secundùm datam directionem parallelis,] agantur his respectivè parallelæ T X, T Y, quibus connexæ Q S, R S, [aut ductæ secundùm datam directionem ad invicem parallelæ] occurrant in x, y, respectivè; junctâque R Q, secante T X in X, fiat T x : T X :: T y : T Y, (sumpto Y ad easdem partes puncti T respectu y, ad quas jacet X respectu x,) & connectatur R Y.

Per Q ducatur Q K ipsi R Y parallela, secans T X in K, fiatque T x : T y :: T K : T I, (sumpto I ad easdem partes puncti T respectu y, ad quas jacet K respectu x,) & connectatur R I occurrens Q K in V.

Bisectâ Q V in M, connexâque R M, per T agatur T O ipsis R Y, Q V parallela, occurrens R M in O; Si diametro R O M, vertice R, ordinatis Q M, T O, fiat

fiat in superficie conicâ (juxta prop. 1.) sectio conica [vel sect. opp.] erit eadem sectio quæsita.

Nam recta R Y (per *coroll.* 8. prop. 20. p. 1.) sectionem in R contingit; Suntque (per constr.) præter tactum R puncta T & Q ad sectionem, adeoque (ob Q M = M V) punctum V; Unde, propter T x : T y : : T X : T Y : : T K : T I, sectio (per *cor.* 3. prop. 35. p. 1.) transibit per P; & propter T X : T Y vel T K : T I : : T x : T y (per ejusdem prop. *coroll.* 2.) transit per S; aut saltem erunt Q P, R P, vel Q S, R S sectionis asymptoto vel parabolæ diametris parallelæ.

Incidente puncto V in Q, diametro R Q, verticibus R, Q, ordinatâ ex T parallelâ R Y, exhibenda est sectio, per prop. 1. cas. 2. & Q V sectionem continget. *Supple figuras horum casuum.*

Si fortè recta R M transit per T, Diametro R T, verticibus R, T, ordinatâ Q M, exhibenda est sectio.

Si ordinata per T transit per S vel Q, Ductâ per R rectâ bisecante S T, vel Q T, hâc sumptâ pro diametro, dimidiâ S T vel Q T pro ordinatâ, vertice R, & aliâ ordinatâ per Q vel S, exhibenda est sectio. Haud absimilis est casus, si ordinata ex T vel Q transit per P.

Si coincidant puncta Q, S, hoc est, si detur recta Q S pro contingente in Q, coincident rectæ S R y, Q X R, rectaque Q x. *i. e.* Q S (per *coroll.* 1. prop. 35. p. 1.) continget sectionem, quod oportuit. Idem erit de punctis Q, P, per ejusdem prop. *coroll.* 4.

Sin coincidentibus Q, S vel Q, P, ordinata per T transit per Q, Vertice R, ordinatâ dimidiâ Q T, diametro rectâ per R bisecante Q T, & contingente Q S vel Q P, exhibenda est sectio, per prop. 1. cas. 3.

Si P vel S ipsi R coincidat, hoc est, si detur R P vel R S pro contingente, coincidet R Y ipsi R P vel vel R S, propter T X infinitam, vel æqualem T x.

In omnibus his casibus manet reliqua, tam constructio, quàm demonstratio; aliquando etiam utraque evadit simplicior.

Cùm hæc constructio manifestè requirat, quòd (ratione munerum quæ singulis punctis assignavimus) præ-

 ter

ter P vel S nullum infinite diſtet, quódque nec P ipſi S, nec Q ipſi R, nec T alii cuivis coincidat; ut in caſu, ubi dantur (pro quinque punctis) duæ rectæ quæ in datis punctis contingant cum infinitè diſtante puncto, directè locum non habeat; Nihilominus ad hunc quoque caſum extendi poteſt. Nam ſi tangentes Q P, R S concurrant in A; per A ductâ rectâ A B, ſecundùm

9. infinitè diſtantis puncti T directionem, ſecante tactus conjungentem in B, biſectâque A B in *t*; duarum contingentium & puncti *t* ope exhibebitur ſectio, cujus aſymptoto, vel diametris (ſi parabola fuerit,) erit A B [vel P T] parallela: ſecus enim propter prop. 1. p. 2. non biſecaretur A B à ſectione in *t*, quod, ſi parallela ſit, omnino fiet per ejuſdem prop. *coroll.* 4. vel ejuſ-

10. dem partis prop. 2. Sin contingentes parallelæ ſint; Erit medium punctum tactus conjungentis B ſectionis centrum, per quod ſecundùm infinitè diſtantis puncti directionem ductâ rectâ B C ſecante unam ex tangentibus in C, erit hæc una ex aſymptotis, factâque P E = P C, erit connexa B E altera; reditque caſus in illum prop. præcedentis.

Si pro duobus punctis detur recta quæ in dato puncto contingat, oportet ut non per aliud ex datis punctis tranſeat, nec ſit rectis ſecundum quarum directionem aliquod ex datis punctis infinite diſtat parallela. Nam uti recta in tribus punctis ſectioni non occurrit, ita contingens ſectionem ei non ampliùs occurrit, nec poteſt eſſe aſymptoto hyperbolæ vel parabolæ diametris parallela.

Coroll. Hinc, & ex *coroll.* prop. 1. ſequitur Inveniri poſſe ſuperficies conicas numero infinitas quarum quævis propoſito ſatisfacit.

Prop. IV. Probl. IV.

11, 12. *Per data quævis quinque puncta* P, Q, R, S, T [*quorum unum, vel duo infinitè diſtare poſſunt,*] *ſectionem conicam vel ſect. opp. in plano deſcribere. Oportet autem*

Supple reliquos caſus.

autem horum nulla tria in directum jacere, nec aliquod secundum duo alia conjungentis directionem infinite distare.

Junctis *ex.gr.* PQ, PR & SQ, SR, [vel ductis secundum datas directiones parallelis si P vel S infinite distet,) agantur ipsis PQ, PR respectivè parallelæ TX, TY, rectis QS, RS in X, Y occurrentes, in quibus sumantur puncta x, y vel simul ad easdem, vel simul ad contrarias puncti T partes, ad quas jacent X, Y, ut sit TX : TY :: Tx : Ty, & connectantur Qx, Ry sese in s intersecantes, vel forte inter se parallelæ; Erit punctum s ad sectionem, vel saltem erunt Qx, Ry hyperbolæ [vel sect. opp.] asymptoto, vel parabolæ diametris parallelæ. Atque hoc modo innumera puncta inveniri possunt.

Quòd sectio conica [vel sect. opp.] per puncta P, Q, R, S, T omnino transire possit, liquet per prop. præced. Et quòd unica, per *coroll.* 5. prop. 35. p. 1; Ad quam (per ejusdem prop. *coroll.* 2.) erit punctum s, vel saltem erunt Qx, Ry asymptoto hyperbolæ, vel parabolæ diametris parallelæ.

Si, pro duobus punctis, detur positione recta quæ in dato ejus puncto contingat, (quam per aliud quodvis ex datis punctis non transire oportet,) Concipe puncta Q, P vel Q, S in dato illo puncto coire, & à datâ illâ rectâ conjungi; Et si duæ dentur ejusmodi rectæ, concipe punctum R & residuum ex punctis P, S coincidere, & à secundâ rectâ conjungi: Et non erit constructio vel demonstratio diversa. 13. *pro omnibus casibus.*

Si vero simul cum duabus contingentibus detur punctum infinite distans, invento novo (finite distante) puncto, ut in simili casu prop. præced. Sectio hâc methodo describi potest; Si vero contingentes parallelæ sint, inventis (quemadmodum ibi ostendimus) asymptotis, describetur per prop. sequentem.

Coroll. 1. Hinc & ex prop. 35. p. 1. cum *coroll.* 5. liquet, Eorundem quinque punctorum, utcunque vices permu-

permutantium, ope, eandem semper sectionem [vel sect. opp.] describi.

Coroll. 2. Et si pauciora dentur sectionis puncta, ita tamen ut simul cum aliis datis indè determinari possint tot alia ejus puncta, ut sint in universum quinque, (*diametrorum* parabolæ sive asymptoti hyperbolæ *directione* pro uno puncto æstimatâ, rectâ vero quæ in dato ejusdem puncto contingat pro duobus,) Sectio hâc methodo describi potest.

Exempli gratiâ.

Si dentur centrum, & tria tantùm puncta sectionis, vel duo cum contingente in eorum altero, dantur totidem ex alterâ parte centri per prop. 22. & *coroll.* 8. prop. 20. p. 1.

Similiter datis tribus punctis, vel duobus & contingente in eorum altero, datâque positione rectâ pro diametro cum angulo quem ad eandem faciant ordinatæ, dantur totidem ad alteras partes diametri per prop. 20. p. 1. Et si in hoc casu dentur tria tantum puncta, quorum unum in ipsam diametrum incidit, dabitur contingens in hoc puncto per *coroll.* 8. prop. 20. p. 1.

Si detur magnitudine recta pro diametro transversâ, proindeque duo extrema ejus puncta pro verticibus, & unum præterea punctum per quod sectio transeat, cum angulo ordinatarum; dabuntur duæ contingentes in verticibus per *coroll.* 8. prop. 20. p. 1.

Si, pro Ellipsi, detur tranversa diameter unà cum *secundâ* diametro huic conjugatâ ad eandem in dato angulo inclinatâ, idem est casus cum præcedenti. Pro hyperbolâ vero [vel sect. opp.] datâ transversâ diametro, atque secundâ huic conjugatâ sub dato angulo ad eandem inclinatâ, ductâque pro contingente huic æquali & parallelâ per utrumvis extremum transversæ punctum, quæ ibidem bisecetur, Rectæ conjungentes centrum & extrema contingentis puncta, erunt asymptoti, per def. ad prop. 23. p. 1; quarum ope, & alterutrius punctorum extremorum diametri transversæ, commodiùs

diùs deſcribetur ſectio per propoſitionem ſequentem.

Si pro Hyperbolâ [vel ſect. opp.] aut Ellipſi, detur tranſverſa diameter ejuſque parameter, cum angulo ordinatarum, Idem eſt caſus cum præcedenti; nam ex his datis innoteſcit ſecunda diameter huic conjugata per prop. 24. p. 1.

Pro Parabolâ, datis tribus tantùm punctis cum diametrorum directione, ductâque ſecundum hanc directionem rectâ quæ conjungentem duo quævis ex datis punctis biſecet, & per reſiduum punctum ductâ conjungenti parallelâ, Dabitur aliud punctum ex contrariâ parte diametri.

Si cum directione diametrorum parabolæ dentur duo puncta, & recta pro contingente in eorum altero; Ductâ per contactûs punctum diametro, erit caſus ſimilis præcedenti.

Datis verò rectâ pro parabolæ diametro & puncto in eodem pro vertice, cum angulo ordinatarum, & diametri parametro; Ductâ per datum punctum rectâ ſub angulo dato pro contingente, ductâque utcunque huic parallelâ diametrum ſecante pro ordinatâ: Ex abſciſſa & parametro innoteſcit (ex prop. 25. p. 1.) longitudo ordinatæ, adeoque duo alia puncta ſectionis.

Sin pro parabolâ dentur duo puncta in quibus datæ duæ rectæ (non parallelæ) ſectionem contingant; Per contingentium occurſum & medium punctum conjungentis data puncta ductâ rectâ, innoteſcit diametrorum directio per prop. 20, p. 1. ejuſque *coroll.* 3.

Redeuntque adeò hi omnes caſus in hujus prop. caſum generalem; Atque alios ſimiliter caſus eò reducere licebit.

Scholium. Hujus methodi ſectiones conicas deſcribendi facillima eſt atque expeditiſſima praxis. In rectis TX, TY ſumptis TI, T1 particulis in ratione TX ad TY, notatiſque ex utrâque puncti T parte I, II, III &c. 1, 2, 3 &c. ad deſignandum TI, T1 ſemel, bis, ter &c. ſumptas, & per correſpondentia puncta (juxta legem prius poſitam) ductis QI, R1; QII, R2; QIII, 14. *pro omnibus caſibus.*

R3

R3 &c. in σ, Σ, ſ, &c. concurrentibus, erunt hæc totidem puncta sectionis describendæ.

Cùm ad rectarum TX, TY puncta magis longinqua deventum fuerit quàm praxi convenit, aut rectarum QI, R1 intersectio magis obliqua evaserit quàm ut satis accuratè notari possit, utrique incommodo mederi licet, punctorum primò datorum loco, alia & commodiora ex jam inventis adhibendo.

Innotescet autem, (si opus fuerit,) nondum descripta sectione, cujus generis futura sit. Nam si juxta *coroll.* 1. prop. 35. p. 1. ad tria puncta ducantur totidem tangentes, (punctis in hanc rem vices permutantibus,) earum ope duæ diametri (per prop. 20. p. 1.) inveniri possunt; Quæ si ad easdem partes cujusvis tactus conjungentis concurrant ad quas ipsæ tangentes, Erit sectio Hyperbola [sive sectiones opp.] Quod etiam erit, si duo simul dentur puncta infinite distantia. Si diametri concurrant ad contrarias partes tactus conjungentis ad quas ipsæ tangentes, Erit sectio Ellipsis; quæ etiam (pro punctorum situ) forte circuli circumferentia evadat. Sin parallelæ fuerint diametri, erit sectio Parabola. Et notandum est, quòd, si detur una contingens cum tribus punctis, duas tantum novas contingentes ducere opus fuerit: Sin dentur duæ contingentes cum uno puncto, priusquam tertia ducatur, inveniendum erit (per methodum præcedentem) novum punctum sectionis, ad quod vel tertia illa contingens ducatur, vel quocum prius punctum vices permutet; Secus deerit punctum quod puncti E in *fig. coroll.* 1. prop. 35. p. 1. (i. e. puncti T in *fig.* hujus prop.) munere fungatur, quod ab aliis omnibus diversum esse necesse est.

Si dentur duæ contingentes parallelæ cum uno puncto, Erit sectio Hyperbola [vel sect. opp.] aut Ellipsis, prout punctum illud extra, intrave, parallelas jacuerit.

Methodus hæc ad casus, ubi dantur rectæ quæ in punctis infinitè distantibus contingant, hoc est, ubi dantur tria puncta cum unâ asymptoto, vel unum cum utrâque, non extenditur, propter duo saltem puncta secundum

cundum eandem directionem infinitè distantia, proindeque coincidere censenda, quæ, nè X, Y (unum vel utrumque) in infinitum abeant, diversa esse oportet. His verò datis, facillimè conficitur problema per propositionem sequentem.

Prop. V. Probl. V.

Datis Hyperbolæ [vel sect. opp.] utrâque asymptoto A H, G H, *& extrà easdem uno puncto* B *per quod sectio transeat; vel datâ unâ asymptoto cum tribus punctis* B, D, F, *ità ut nec omnia tria in directum jaceant, nec conjungens duo aliqua sit datæ asymptoto parallela: Sectionem describere.* 15.

1. Si detur utraque asymptotos cum uno puncto B, Per B ducantur utcunque quotlibet rectæ B A, B C &c. uni asymptotôn in A, C &c. alteri in G, E &c. respectivè occurrentes, fiantque G F, E D &c. ipsis A B, C B &c. respectivè æquales, Erunt puncta F, D &c. ad sectionem.

Nam si asymptotis A H, G H, per punctum B fiat (per prop. 2.) hyperbola [vel sect. opp.] hæc à lineâ sic descriptâ (propter *coroll.* 1. prop. 15. p. 1.) non erit diversa.

2. Sin una tantum detur asymptotos A H, cum tribus punctis B, D, F, Junctæ B D, B F occurrant datæ asymptoto in A, C, factisque D E = C B, F G = A B connectatur E G, occurret hæc necessario rectæ A C alicubi in H; nam si esset ei parallela, ob A B = F G & C B = D E, esset connexa D F parallela A C contra hypothesin: Sumptâ itaque E G pro alterâ asymptoto, casus hic in priorem redibit. 15.

Si ex datis tribus punctis duo coincidant, hoc est, si detur unum punctum cum rectâ quæ in dato puncto contingat quæ non sit datæ asymptoto parallela, Concipe duo puncta coincidere & à datâ rectâ conjungi, & non erit casus diversus.

15. Si ex tribus punctis unum infinitè distet, hoc est, si duo tantùm dentur puncta, ex. gr. B, D, cum alterius asymptoti directione (quæ cum datæ asymptoti directione non sit eadem) Connexâ B D occurrente datæ asymptoto in C, factâque D E = C B, per E secundum datam directionem ducatur E G; Hâc pro alterâ asymptoto assumptâ, confit iterum problema per casum 1.

Prop. VI. Probl. VI.

16, 17. *Datâ pro Hyperbola [vel sect. opp.] axe determinato vel majore Ellipseos, rectâ* A B, *cum utroque foco* F, G, *ut sit* A F = G B; *Sectionem, vel sect. opp. describere.*

In F G (productâ pro hyperbolâ vel sect. opp.) sumatur utcunque punctum C; centro utrovis foco F vel G, intervallo A C, rursus centro residuo foco G vel F, intervallo C B, describantur arcus circulares sese intersecantes in D; Erit punctum D ad sectionem: Eodemque modo, novorum punctorum C ope, innumera ejusmodi puncta D inveniri possunt.

Junctis F D, G D, Ob D G = A C vel B C, F D = B C vel A C erit pro Hyperb. F D — D G vel D G — F D, pro Ellipsi F D + D G, = A B: Si igitur transversâ diametro A B, & secundâ huic conjugatâ ita sumptâ ut ejus quadratum æquale sit rectangulo A G x G B, & angulo ordinatarum recto, juxta *corol.* 2. prop. 4. fieri intelligatur sectio [vel sect. opp.] cui G D *ex. gr.* (si opus producta) occurrat in *d*, & connectatur F *d*; erunt (per prop. 1. p. 4.) Foci F, G; & (per prop. 5. p. 4.) in hyperb. vel sect. opp. F *d* — *d* G vel *d* G — F *d* = A B = F D — D G vel D G — F D; in Ellipsi F *d* + *d* G = A B = F D + D G; quod fieri non potest nisi conicidant D, *d*; & sic ubique.

Prop.

Prop. VII. Probl. VII.

Datis Parabolæ axe A F, *vertice* A, *& foco* F; *Sectionem describere.* 18.

In F A, ultra A productâ, sumatur A B = A F, & ducatur B E ad A B perpendicularis; sumptoque in A F, ultra A, puncto C, centro C intervallo F C descriptus arcus secet B E in E, deinde centris E, F, eodem intervallo descripti arcus sese intersecent in D; Erit punctum D ad sectionem: Eodemque modo innumera ejus puncta inveniri possunt.

Est enim quadrilaterum F C E D (per construct.) æquilaterum, adeoq; parallelogrammum, unde E D parallela A F, & F D = D E: Si jam diametro B A F, vertice A, parametro = 4 A F, angulo ordinatarum recto, fieri intelligatur (juxta *coroll.* 2. prop. 4.) parabola, atque huic (si opus producta) occurrat E D in *d*, & connectatur F *d*, erit (per prop. 2. p. 4.) Focus F, & (per prop. 10. p. 4.) E D = F *d*; connexâque E F, erunt ob commune latus E F & communem angulum F E D, triangula isosceli a F D E, F *d* E invicem æqualia, hoc est coincident D, *d*; Et sic ubique.

Prop. VIII. Probl. VIII.

Datis duabus rectis F N, F A *sese in puncto* F *intersecantibus, & in earum alterâ alio puncto* A; *Hyperbolam* [*vel sectiones oppositas*] *describere, cujus focus alter sit* F, *recta* F N *axis, recta* F A *asymptoto parallela, & punctum* A *ad sectionem*; *Oportet autem ut angulus* N F A *non sit rectus.* 19.

In rectâ F A, ultra A, sumatur A B = F A, & ex B demittatur in F N perpendicularis B N; In F A, ex utravis parte puncti F, sumpto puncto C, ita tamen ut sit C F major perpendiculari à C in rectam B N de-

missâ, Centro C, intervallo C F, describatur arcus circuli secans B N in E, rursus centris E, F eodem intervallo descripti arcus sese intersecent in D; Erit punctum D ad sectionem: Eodemque modo quotlibet ejusmodi puncta inveniri possunt.

Ductâ A L parallela F N secante N B in L, dividatur N F in K ut sit F A : A L :: F K : K N, productâque F N fiat.

1. F K — K N : K N :: 2 F K : K I,

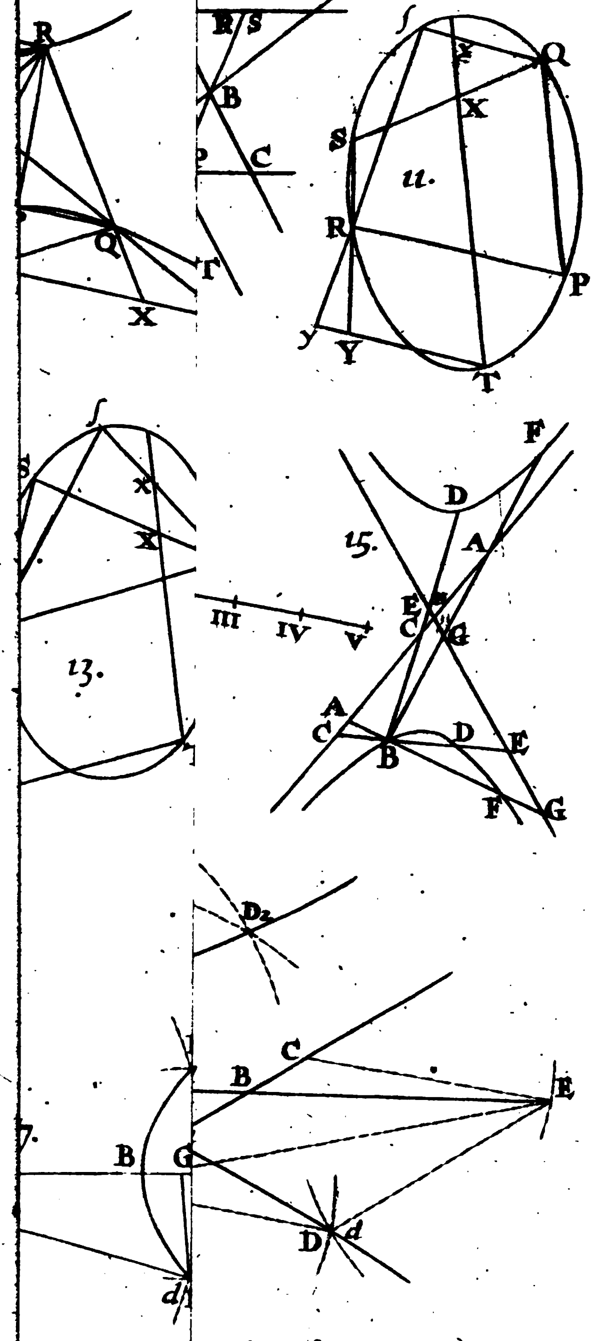
productâque F I fiat I G = K F. Focis F, G, axe transverso I K, (juxta prop. 6.) fiant sectiones oppositæ, quarum uni occurrat F A in *a*, & ducatur *a l* parallela F K secans N B in *l*. Propter proport. 1. erit componendo.

2. F K : K N :: $\left\{\begin{matrix} 2\ F K + K I \\ G F \end{matrix}\right\}$: K I :: (per prop. 9. p. 4.) F *a* : *a l* :: (prius) F A : A L; Coincidunt itaq; puncta A, *a*: Nam si dicatur F *a* ⊏ F A (cùm N L, F A ultra L, A productæ coeant in B) erit *l a* ⊐ L A contrà quàm oportuit, & vice versâ; Unde punctum A erit ad sectionem. Rursus per proport. 2 alternando & dividendo.

$\left\{\begin{matrix} G F — F K \\ I F \end{matrix}\right\}$: F K :: $\left\{\begin{matrix} K I — K N \\ I N \end{matrix}\right\}$: K N,

erit itaq; (propter *Coroll.* 1. prop. 1. p. 2.) punctum N illud in quod coeunt tangentes in extremis ordinatæ ad diametrum K F per F ductæ; quæ ordinata (cùm K F axis sit) erit parallela N B, utpote ad K F perpendicularis; Eritq; adeo A F asymptoto parallela; secus enim occurreret sectioni vel sect. opp. in binis punctis, & (propter prop. 3. p. 2.) non esset F A = A B contrà quàm fieri præceptum est. Quòd vero punctum D sit ad sectionem, eodem modo liquet quo (prop. præced.) in parabolâ.

FINIS.



urghiers sculp.